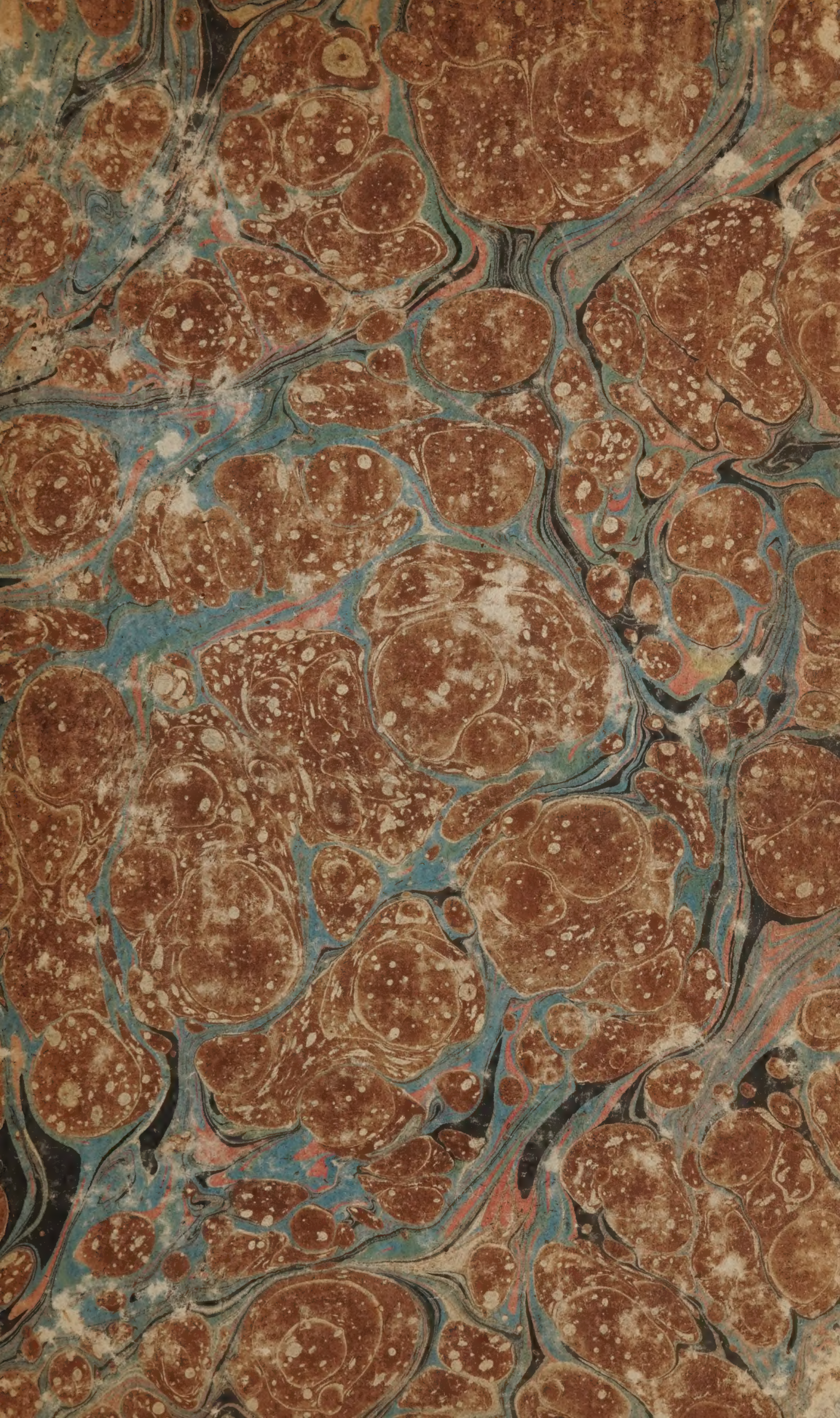


Schmid, Joseph

Die

Elemente der Algebra

nach

Pestalozzischen Grundsätzen

bearbeitet

von

Joseph Schmidt,

einem Zögling und Lehrer am Pestalozzischen
Institut zu Iferten.

Heidelberg
bei Mohr und Zimmer
1810.

Leser!

Was soll ich Euch anders sagen oder rathen, als: Arbeitet und denkt jede Aufgabe und Reihenfolge durch, wie sie in dem Buche vorkommt! Doch dieß ist zu allgemein, ich muß mich noch umständlicher ausdrücken, besonders da dieß Buch nur die Ansicht einer einzelnen Seite, der Zahl, enthält. Diese in das richtige Verhältniß zum Ganzen zu setzen, wird meine erste Betrachtung seyn: die zweite soll zeigen: wie ich seinen Inhalt an das anschließe, was in der Welt bereits über diesen Gegenstand geschrieben und ausgeführt worden ist.

* *

1) Diesem Hefte schicke ich das Kopfrechnen voraus, welches absolut nothwendig ist. — Neben dem Kopfrechnen mit reinen Zahlen, sollte mit Kindern, welche umfassend geführt und entwickelt werden, die Anwendung der Zahl stets parallellaufend mit den reinen Zahlenverhältnissen gemacht, parallellaufend mit diesem aber die Zahl auf die Ziffer, — und endlich sollen die reinen Zahlenverhältnisse wie die angewandten, noch einmal auf die Ziffer angewendet werden; neben der algebraischen Ansicht der Zahl lauft denn dieses fort, nur auf einer höhern Stufe. Dieses ist hier im Institute theilweise schon Jahre lang ausgeführt worden; das Fehlende wird ausgearbeitet, und nächstens der Presse übergeben werden. Unabhängig jedoch vom obigen, kann das, was ich hier dem Publikum übergebe, mit Schülern, welche die Algebra lernen sollen, betrieben werden; es ganz allgemein in Volksschulen einzuführen, ist nicht rathsam, bevor die Zahlenverhältnisse noch nicht allseitig ausgeführt sind, welches im Laufe dieses Winters geschehen soll.

Bedenklich wird man mich fragen: Ob denn die Algebra sogar in die Volksschulen heruntergebracht werden müsse?

Ich antworte: Nein! Aber das Volk muß zur Algebra hinaufgebracht, es muß zu ihr erhoben werden. Wie dieß möglich sey? wird man nicht begreifen, indem die Kinder nur auf eine gewisse Zeit und unter Umständen in die Volksschulen kommen, die diese Behauptung zu verwerfen scheinen; mit andern Bedenklichkeiten, die man haben mag, würde man ebenfalls Recht haben, wenn man die Algebra ohne entwickelte Kraft, oder um der Algebra selbst, und nicht um der algebraischen Kraft des Kindes willen, lehren und betreiben würde.

Die Zeit wird beweisen, welcher Entwickelung das Volk fähig ist, und vielleicht wird es nicht lange mehr dauern, wo man über Unterricht in der Algebra und Mathematik anders denken, reden, schreiben und handeln wird, wo alsdann auch beide Sache des Volks werden und werden müssen. An die Stelle des

Lesens und Schreibens todter Buchstaben werden Geist- und Herzbildende, und den innern Menschen ergreifende Uebungen treten, und ihm wieder Leben und Kraft ertheilen.

Es würde nichts verlohren seyn, wenn jene todten Formen, aus der Bildung der ärmsten Hüttenbewohner, so lange ganz wegblieben, bis das Leben dafür durch andere Geist- und Herzbildende Mittel so weit entwickelt wären, daß beides, Schreiben und Lesen, wieder ein Fundament bekäme. Die Zeit, die man für das Schreiben- und Lesenlernen u. s. w. braucht, könnte unendlich besser für den ersten Schritt, den die Menschheit in den untersten Volksklassen machen muß, angewandt werden. Beides ist zwar ein nothwendiger, aber auch erst zweiter Schritt unserer Bildung; wer den ersten nicht machen kann, sollte auch den zweiten nicht thun. —

Daß die Algebra und Mathematik für diesen ersten und zweiten Schritt, so wie für die ganze Ent-

wickelung unsers Geschlechts ein wesentliches Bildungsmittel ist, bedarf nicht mehr erwiesen zu werden. Das allgemeine Ergreifen dieses Unterrichts (im Institute) in Jung und Alt, in Gebildeten und Ungebildeten, in Schwachen und Starken, ist Erfahrungsbeweises genug für ihre allgemeine Anwendbarkeit. Auch die Resultate bestätigen dieses mehr als hinlänglich; die Masse der Zöglinge und Erwachsenen des Instituts können von dieser Seite zum Beweis dienen. Schon jetzt haben sich mehrere weit über den Unterricht erhoben; sie sind fähig ohne alle Anleitung und Bücher weiter fort zu schreiten, und die Bücher dieser Wissenschaft selbstständig zu lesen und zu benutzen.

Die Mathematik und Algebra ꝛc. wird auf diesem Wege Sache der gesammten Menschheit werden, während sie bis jetzt nur Sache einzelner vorzüglicher Köpfe und der Bibliotheken war.

Aber, wird man mir antworten, dieses mag allerdings bei glücklichen Kindern und Erwachsenen

seyn, wie ihr in eurem Institute habt; allein dieß unter dem, in Armuth und Noth versunkenen, Volke hervorzubringen ist unmöglich — es ist ein Traum! — Es würde ein Traum seyn, wenn wir die kindlichen Anlagen nicht naturgemäß durch Algebra und Mathematik für Algebra und Mathematik entfalten würden.

Doch was hilft reden; wer durch die Sache selbst nicht überzeugt und ergriffen wird, wird durch keine Worte ergriffen und überzeugt werden; für solche kann nur eine unwidersprechliche Ausführung in den ärmsten und untersten Volksklassen überführend seyn, welche ich mir zur ersten Pflicht meines Lebens mache.

Keine wahrhafte Mathematik ist möglich, die nicht ihre erste und tiefste Wurzel in der Gesammtheit des Volkes faßt; eine andere Mathematik ist auf einige Schosse gepfropft, die keine Wurzel und keinen Stamm haben. — Ich habe Mathematik zum Werke meines Lebens gemacht; wenn sie nicht fundamentlos

bleiben soll, muß ich sie in einen Boden pflanzen, wo sie Wurzeln und Stamm erhalte! Möchte ich einst so glücklich seyn, der Menschheit, der Wissenschaft selbst und meinem Vaterlande diesen Dienst erweisen zu können! Völker Deutschlands! ihr seyd für eine solche Entwickelung geboren, und euer, und eurer Fürsten beglückender und unsterblicher Wirkungskreis besteht in dieser tiefen und umfassenden Bildung unsers Geschlechts. Ihr wirket für sie, aber möchte euer Wirken von Scheinmitteln auf wirkliche übergetragen werden. Wahre Bildung kann für den Fürsten so wenig als für den Unterthan gefährlich seyn, oder werden. Die Gefahr liegt in der Halbheit und Unwissenheit. Je tiefer und umfassender ein Volk in seiner Ausbildung geführt wird, desto zuverläßiger wird es; je oberflächlicher hingegen, desto unzuverläßiger und anmaßender wird es werden. Es glaubt bei Nichtskönnen und Nichtsverstehen alles zu verstehen und alles zu können.

Wie der Bauer von einer Seite durch sein Haus und Hof in Leben und Wonne gesetzt und erhalten

wird, muß er in Rücksicht seiner geistigen Bildung durch Mathematik ergriffen werden; er muß, statt aus langer Weile Karten zu spielen, mit vollem Leben algebraische und mathematische Aufgaben lösen.

Doch ich kehre auf mein Gebiet zurück, und mache, bevor ich zu meinem zweiten Gesichtspunkt komme, zum Voraus noch einige Bemerkungen über die eigentliche Altersperiode, für welche ein systematischer Unterricht sich vorzüglich eignet, oder über die Schulfähigkeit der Kinder in ihrem ganzen Umfang. Der Schulunterricht verlangt seiner Natur nach ein höheres Alter, als man gewöhnlich glaubt. Dieß gehörig auseinander zu setzen, würde mich hier zu weit führen; ich zähle daher nur meine Erfahrungen auf, die ich seit Jahren machte — sie mögen das Urtheil sprechen.

Kinder, die im sechsten oder siebenten Jahre in der Schule ihre Geistesbildung empfangen, bringen es in dem ersten Vierteljahre oder Halbjahre ziemlich

weit; dann stehen sie aber auch wieder lange still, und werden von einem Kinde, welches im neunten oder zehnten Jahre anfängt, in Zeit von drei, vier Jahren eingeholt, so daß sie im gleichen Alter ziemlich auf einer Stufe stehen, ohngeachtet jene drei, vier Jahre früher anfiengen. Die Natur läßt sich nicht aus ihrem Gleise bringen, sie verlangt Zeit und Weise; die eilfertige Eitelkeit der Menschen, ihre Kinder mit Schulkenntnissen glänzen zu lassen, wird theuer bezahlt.

Aber, wenn dieß bei den Uebungen mit Zahl und Form richtig ist, läßt sich sonst nichts Zweckmäßigeres für dieses Alter in Schulen treiben? — in dem gewöhnlichen Schulunterricht war ohnedem hiervon nicht die Rede.

Das mechanische Schreiben, Lesen und Zeichnen kann allerdings noch eher betrieben werden, als jene abstrakteren Uebungen zur Geistesbildung; aber auch hierin wird man späterhin schnellere Fortschritte machen. —

So bleibt also, wird man mir einwenden, für das Kind bis in das Alter von neun eilf Jahren nichts mehr zu thun übrig, und dann wartet zu viel auf einmal für ein solches der Natur überlassenes Kind.

Daß viel auf dasselbe warte, ist leider nur zu wahr. Es muß so seyn, wenn man das Treiben und Dringen der Menschen aller Stände fest ins Auge faßt, wenn alle Kriege und Eroberungen, jeder Ländertausch- Kauf-, Verkauf und Verrath, die Kenntnisse fast aller Künste und Gewerbe in unsere Schulen gebracht werden soll. Je weniger wir uns genügen, desto angefüllter mit unnatürlichen Materialien und desto unnatürlicher werden unsere Schulen werden. —

Dieß ist nun einmal so, und wird nicht anders werden, bis einmal etwas Besseres an die Stelle tritt. Wir müssen daher die Kinder vom siebenten, achten Jahre an in die Schule schicken, bis die Tochter der

Gertrud, (die das Bessere von allem diesem gesehen und erfahren hat), uns zeigt, was sie jetzt als Mutter an ihren Kindern thut.

Sie wird weit entfernt seyn, ihr Kind in die Schule zu schicken, damit es — sitzen lerne; sie, oder vielmehr die Natur lehrt dasselbe alles, was diesem Alter angemessen ist; es sitzt, wenn es müde ist, und läuft, wenn es aufgelegt ist, was ihm selten fehlt.

Im Genuß dieser Freiheit wird sein Auge nicht weniger geübt, als in der Schule. Es schaut und faßt alles in und außer dem Hause so auf, daß es im zehnten Jahre so viele Auffassungs- und Unterscheidungsvermögen besitzen wird, sollte es bisher auch noch keinen Buchstaben gesehen haben, jeden bei der ersten Ansicht zu unterscheiden und zu behalten — ja es wird im Alphabet das in einigen Stunden leisten, was es im sechsten, siebenten Jahre kaum in einem Winter geleistet haben würde. Seine Hand, sein Ohr ja selbst sein Verstand werden an Fertig-

keit dem Auge nicht nachstehen; seine Hand wird für das beschränkte Schreiben in der Schule so gebildet seyn, daß es in wenigen Stunden das wieder einholt, was ein sechs- siebenjähriges Kind in einem Winter leistete. Bekommt dann ein Naturschulmeister solche Naturkinder in die Schule, so braucht er nicht mehr Schultyrann zu seyn, er kann kindlich und natürlich werden, wie das Kind, welches bisher so allgemein mangelte. Die Unnatur dieses Standes ist so weit gekommen, daß bei Erwähnung desselben der Schullehrer dessen sich fast schämt, und Kinder davor erzittern. Das Kind lernt bei und durch die Tochter der Gertrud alles, was die Natur es lehrt, und lernt es, ohne je eine Unterrichtsstunde gehabt zu haben.

Doch vermag die Mutter das Kind nicht bis an sein zehntes Jahr auf diese Art den ganzen Tag zu beschäftigen; die Natur will es nicht mehr. Sein Geist, von den nächsten Umgebungen gesättigt, findet zu wenig Spielraum bei seiner Mutter und seinen

jüngern Geschwistern; es sucht seines Gleichen, es will weiter als vor die Thüre. Von dieser Epoche an sollten mehrere bei einander wohnende Familien ihre Kinder gemeinschaftlich auf Spaziergängen in die weite Natur hinführen, sie Steine werfen, schleudern, Ruthen schneiden, Pflanzen, Steine, Schwämme sammeln und besorgen lassen, sie in diesem Geiste auf Berge, Seen, Flüsse u. s. w. führen, und ungefähr das mit ihnen treiben, was ein Robinson auf seiner Insel macht. Dann muß es aber nicht blos gesagt, es muß gethan werden — mit einfachen Worten zu sagen: Man muß das mit ihnen treiben, wozu sie ihr eigner Trieb hinführt! Die Sprache, das Rechnen, sogar die ersten Grundbegriffe und Anschauung der kindlichen Mathematik werden auf diesen Wege nicht zurück bleiben. Das, was ich über diesen Gegenstand in der Wochenschrift niederschrieb, ist noch nicht genug Natur für diesen ersten Unterricht; es ist noch zu viel für die Schule darin. Einzelne Unterrichtszweige lassen sich mit diesem Alter noch nicht wohl bearbeiten; das Kind muß auf dieser Stufe als

ein Ganzes ins Auge gefaßt werden, und nur der, der diesen kindlichen Sinn auffaßt, kann diese kindliche Entwickelung so ausführen, wie sie ihrer Natur nach ausgeführt seyn will. Auch dem, der es als gut und zweckmäßig zugiebt, wird dieses unausführbar erscheinen. Es ist verzeihlich! Die Schulunnatur hat den größten Theil der Menschen so weit verkünstelt, daß sie sich nicht mehr so leicht zur Natur erheben, und sich in derselben finden können. Bevor also dieß ausgeführt werden kann, müssen wir die Menschen wieder zur Natur zurückführen, und ehe wir dahin kommen werden — wird dieß alles — nur ein Traum bleiben!

Doch ehe die Masse dahin geführt wird, können einzelne Menschen so gebildet werden, freilich nicht in diesem ganzen Umfang. — Alles in der Natur geht nur Schritt vor Schritt vorwärts, darum mag man es immer mit Einzelnen anfangen und mit Einzelnen die ersten Anfänge einzelner Unterrichtsfächer so behandeln. So könnten sehr zweckmäßig Schulen für

diesen Gesichtspunkt eingerichtet werden, welche aber ganz verschieden von den gewöhnlichen geführt werden müßten. Daß Kinder nicht zu früh in die Schule geschickt, und auf die gewöhnliche Schulart beschäftigt werden, ist von Wichtigkeit für häusliche Nationalbildung. Physische und geistige Kraft, Muth und Geschicklichkeit, Gewandtheit des Körpers entwickeln sich in ihrer Fülle nur in diesem Alter und auf diesem Wege. Laßt uns hier die Sorgfalt, die man gewöhnlich aus Eigennutz und Gewinnsucht auf das Vieh verwendet, aus Menschlichkeit auf unsere Kinder verwenden.

Ich komme zum zweiten Gesichtspunkt.

Um dieses Buch zweckmäßig in seinem ganzen Umfang zu gebrauchen, erfordert es eigentlich einen häuslich entwickelten Sohn oder Tochter der Gertrud. — Da es nun aber einmal solche nicht findet, so will ich meinen Blick auf das richten, was da ist, und zeigen, wie es sich an dieses anschließe, wie es dem gemäß gebraucht werden müsse.

Das Alter der allgemeinen Vernunftschlüße ist etwa das zwölfte, dreizehnte bis vierzehnte Jahr. Einige Uebungen und Reihenfolgen könnten zwar schon im neunten, zehnten und eilften Jahre vorgenommen werden; allein man kömmt auch hier wieder auf die Erfahrung zurück, daß ein Kind mit gleichen Anlagen, welches zur rechten Zeit anfängt, demjenigen den Uebersprung wieder abgewinnt, welches zu früh anfieng. Setzt man die Schulzeit überhaupt auf das neunte, zehnte Jahr, so kommt man nicht zu früh zu diesem Theil, wenn alles das getrieben wird, was ihm in allen Rücksichten vorausgeht und vorausgehen muß, wenn die Sache in ihrem ganzen Umfange gehörig betrieben werden soll. Diejenigen, welche bisher Algebra anfiengen und trieben, waren für selbige nicht vorbereitet, ihre Kräfte dafür nicht entwickelt — und anderseits wurden ihre Kräfte eben so wenig durch Algebra für Algebra entwickelt — im Gegentheil machte das mechanisch-algebraische Formelwesen den größten Theil derer, die es trieben, mehr stumpf als lebendig.

Man setzt mir als Gegenbeweis vergebens die großen Algebraisten entgegen. Was diese wurden, wurden sie nicht durch diese einfachen, leicht nachzumachenden Formeln, vielmehr wurden diese unter ihren Händen erst Algebra. Durch ihre überwiegende Kraft, womit sie die Natur ausgestattet hatte, erhoben sie sich über das Affen- und Papagayenthum des Formelwesens, und dieses erhielt erst durch ihren Geist und Kraft das, was es für sie nicht hatte — Geist und bildende Kraft. Von der Natur erhaltene Geistesstärke war die Mutter ihrer Größe.

Daß das mechanische Verfahren mit algebraischen Formeln so einfach und leicht ist, daß man fast einen Affen dazu abrichten könnte, wird der, der es kennt, mir ohne Wiederrede zugeben; aber das rechte Verstehen und Eindringen in dasselbe, das Verfahren mit Bewußtseyn und Urtheil ist unendlich tief und schwer. — Diese zwei Extreme brachten die bestehende Unnatur nothwendig hervor. Diesem abzuhelfen, stellte ich hauptsächlich das algebraische reine Kopfrech-

nen, ohne alle Formeln, dem mit Zeichen oder Formeln oder der bisher genannten Algebra, voran.

Hier werden mir die gewöhnlichen Algebraisten zurufen: Wozu so viel Wesens — wozu alle diese Vernunftschlüsse; durch diese und jene Formel haben wir im Nu, was wir suchen — „Sie werden mir die Aufgaben — durch ihre Formeln nachrechnen, und triumphirend sagen: Schau! ich habe es schon, weg mit diesem Unwesen!" — Dieß thut aber nichts; die Natur, das Naturgemäße wird doch siegen.

Man gebe einem Kinde, oder auch einem erwachsenen Menschen, der noch nicht in algebraischen Formeln verhärtet ist, meine Aufgaben, und beide werden sie ohngefähr so finden und lösen, wie sie im Buche vorkommen. Für solche werden sie leicht, für einen Formelmenschen schwer, ja fast unmöglich, zu lösen seyn, wenn er seine Formeln nicht brauchen darf; freilich muß derjenige, der dieses so lösen will, eben so wenig in die arithmetischen Regeln und For-

meln versunken seyn. Haben Kinder das von mir aufgestellte Kopfrechnen vollendet, darneben das Zifferrechnen bis auf diese Stufe gebracht, und mit Anwendung der Zahl, wie es gewöhnlich geschieht und geschehen muß, sich beschäftiget, so kann mit ihnen in einem Alter von zwölf, dreizehn Jahren der Anfang mit diesem algebraischen Kopfrechnen gemacht werden, und zwar ist es nicht allein für solche bestimmt, die eigentlich Algebra lernen, sondern auch für solche, die das eigentliche Rechnen auf eine gewisse Höhe bringen und in dasselbe eindringen wollen; für diejenigen wird es aber hauptsächlich seyn, welche ihre logische Denkkraft entwickeln und üben wollen. Es ist die eigentliche Logik! Dieser entwikkelt- logischen Kraft bedarf jeder Mann, der als Mann unter seinen Mitmenschen, unter welchen Formen und Verhältnissen es auch sey, dastehen will, und dastehen soll; nur sie erhebt ihn zu allem, was er in dieser Rücksicht als Mann bedarf. Der Kaufmann braucht sein Rechnen den Tag über kaum ein

Paar Stunden, seine logische Denkkraft bedarf er aber den ganzen Tag.

Für solche, die nicht eigentlich Algebra lernen, aber ihr logisches Denkvermögen um des Rechnens oder ihrer sonstigen Bildung des Verstandes willen daran üben wollen, wird der aufgestellte Umfang der Uebungen theils zu schwer seyn, theils sie zu weit und zu tief hineinführen, für solche wird es gutgethan seyn, wenn sie z. B. im §. 2. wie in allen andern nur die einfachern Aufgaben durchmachen, d. h. diejenigen, wo eine unbekannte Zahl mit einer oder zwei bekannten in Gleichheit gesetzt werden; die schwerern, wo eine unbekannte Zahl mit sich selber mehr einer bekannten in Gleichheit gesetzt wird, müssen bei sehr schwachen Schülern, wie bei solchen, die nicht in das ganze Gebiet der Algebra eindringen sollen, zum Theil wenigstens übergangen werden; eben so müssen solche Schüler nicht zu tief in die negativen und positiven Verhältnisse geführt werden; ungefähr das

Gleiche findet statt bei zwei und drei unbekannten Zahlen, wobei ich jedoch bemerke, daß zwei, drei und mehrere unbekannte Zahlen auf gewissen Stufen leichter und passender sind, als zwei unbekannte auf andere und verwickeltere Art ausgedrückt, welches jedoch ziemlich deutlich und ausführlich an seinem Platze angebracht ist. Auch mit Kindern, welche zwar die Algebra lernen sollten, aber noch nicht auf der gehörigen Stufe der Entwickelung stehen, zu jung, oder sonst schwach am Geiste sind, kann dieses auf obige Art zuerst einmal durchgeführt, und bei einer Wiederholung können die schweren Aufgaben nachgeholt werden.

Bei Uebereinstimmung mit diesen Grundsätzen wird man mir den Wunsch äußern: eine solche Abkürzung oder Auszug daraus würde keine unnöthige Arbeit seyn! —: ich behaupte aber, eine solche Abkürzung wäre schädlich, indem dadurch nicht nur der innere Zusammenhang zum Theil verloren gehen, sondern auch dem Weiterstreben der Tod gegeben, und

der thätige kraftvolle Mann dem Trägen gleich gemacht würde. Auch in den untersten Volksschulen giebt es Männer, deren Streben über das Alltägliche hinausgeht, und so sind auch meistens ihre Schüler. Diesen das unendliche Gebiet ihres Wirkens zu zeigen, und sie sicher darinn zu führen, war nie wichtiger für die Menschheit als in den jetzigen Zeiten, und besonders für Deutschland.

Möchte man sich aber auch vor den in sechs bis acht Wochen für ihren Lehrerberuf zugestutzten Schullehrern hüten, die dann überdies noch glauben, sie könnten und wüßten alles, was ihr Stand erfordert. Besser der alte Schlendrian, als diese oberflächliche Anmaßung. So lange man bei einer solchen Bildung stehen bleibt, müssen freilich auch solche abgestutzte Mittelchen gebraucht werden; für diesen Fall müßte dann auch eine Abstutzung der besten Aufgaben und Reihenfolgen gemacht werden. Aber daraus würde abermals, statt Entwickelung und Bildung der Geisteskräfte, ein unverdautes Anfüllen werden, wovon wir

schon genug und nur zu viel in unsern Schulen haben. Vieles in dem gegenwärtigen Zustande der Menschen läßt sich in diesem mangelhaften Zustande unsrer Schulen nachweisen. Ich kehre zur Sache zurück, und sage; das algebraische schriftliche Rechnen läuft nach dem zweiten oder dritten §. dem algebraischen Kopfrechnen parallel nach. Wie man beim Kopfrechnen bei der Vergleichung anfieng, so kann dieses auch bei dem Schriftlichen geschehn. Ich fieng gewöhnlich das schriftliche algebraische Rechnen bei dem vierten §. an, welches ohne weiteres geschehen kann, wenn man die allgemeine Bezeichnung der Größen, oder den ersten §. vorausgeschickt hat.

Warum soll aber, wird man fragen, der zweite und 3te §. übergangen werden? Der Grund dieses Uebergehens ist: weil das Zusammenzählen und multipliziren negativer Größen mit positiven zu schwer zu begreifen ist. Alle andere Aufgaben sind so einfach und leicht, daß es nicht einmal mehr nöthig ist, sie durchzuführen, wenn das Kind in den Zahlen gehörig geübt ist, welches vorausgesetzt werden muß.

Geht man zu den Gleichungen über, ohne vorher das Multipliziren und Zusammenzählen der negativen Größen mit positiven getrieben zu haben, so ist es nöthig bei jeder Gleichung, in welcher dieses Verhältniß vorkommt, zu erklären, was durch dasselbe für Größen entstehen; wodurch man nach und nach auch zur Abstraktion einer allgemeinen Regel des Verfahrens mit solchen Größen kommen wird; doch ist der Gang, der im Buche aufgestellt ist, allgemeiner aber auch schwerer; es erfordert das gehörige Alter und hinlänglich entwickelte Kraft in diesem Alter, die vielleicht aber jetzt noch nicht hinlänglich angetroffen wird; wo dieß nicht statt findet, muß der zweite und dritte §. des schriftlichen algebraischen Rechnens mit den negativen und positiven Größen erst nach dem sechszehnten folgen.

Ich nahm bei den Aufgaben hauptsächlich auf dieses Rücksicht, indem ich alle Aufgaben, die durch das Zusammenzählen und Multipliziren negativer Größen ausgedrückt würden, so viel als möglich, über-

gangen sind, weil sie sehr schwer zu begreifen und unwichtig in den Aufgaben des ersten Grads sind. —

Man wird beim algebraischen schriftlichen Rechnen noch bemerken, daß zuerst die allgemeine Gleichheitsformel, nach der alle Aufgaben gelöset werden müssen, entwickelt wurde, und daß dann erst die Aufgaben auf die verschiedenste Art ausgedrückt und durch diese Formel gelöset worden sind, wie man im Buche sehen wird; ich setze dieses noch dazu, um die Unabhängigkeit dieser Formel von der Aufgabe selbst bemerklicher zu machen. Auch hätte die Formel leicht aus den einzelnen Aufgaben entwickelt werden können, welches ich einigemal mit meinen Schülern durchführte; ich fand aber diesen Gang für die Mehrheit der Schüler zweckmäßiger.

Die Grundsätze, auf denen die algebraische Behandlungsart der Zahl beruht, ist mit denen der reinen Zahlenverhältnisse eins. Seht nur mein Heft des Kopfrechnens nach.

Weiter über diese Grundsätze und den Inhalt des Buches mich zu verbreiten, ist unnöthig. Ich schließe, mit der Ueberzeugung: daß bei einer genauern Befolgung des Gesagten, außer dem Institute, das Nämliche damit hervorgebracht werden könne, was seit einiger Zeit in demselben hervorgebracht wurde.

Den 11. Jenner 1810.

Der Verfasser.

§. 1.

Von einer unbekannten Zahl, die in allen möglichen Beziehungen zu bekannten in eine allgemeine Gleichheit gesetzt, und welche man gewöhnlich algebraische Gleichheit nennt.

Vom Haupthaltungspunkt aller Aufgaben, welcher hier die Gleichheit ist.

Lehr. Eine jede Zahl oder Größe ist gleich ihr selber, oder einer andern Zahl oder Größe, die so groß ist als diese Zahl.

So ist ein gewisser Theil einer Zahl oder Größe gleich dem nämlichen Theil der Zahl oder Größe. Z. E. die Hälfte einer Größe oder Zahl ist gleich der Hälfte von ihr; der Drittel ist gleich dem Drittel von ihr; so sind $2/3 = 2/3$, $3/4 = 3/4$ rc.

Das Doppelte einer unbekannten Zahl oder Größe ist gleich dem Dppelten von ihr u. s. w. Aus diesem fließt, daß eine unbekannte Zahl oder Größe die Hälfte vom Doppelten von ihr wird u. s. w. So wird diese Zahl auch 2 mal so groß als die Hälfte von ihr, 3 mal als der Drittel u. s. w.

Also kann man allgemein sagen: die Theile einer bekannten oder unbekannten Zahl stehen im nämlichen Verhältniß zur Zahl, wie die Theile eines Ganzen zum Ganzen u. s. w.

§. 2.

Eine unbekannte Zahl unorganisch bildend und aufhebend, zu bekannten in Gleichheit gesetzt.

§. a.

Von einer unbekannten mit bekannten.

Lehr. Eine unbekannte Zahl ist gleich 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w.; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. Im ersten Falle ist sie 1, im 2ten 2 u. s. w., nach der allgemeinen Vergleichung einer Zahl mit sich selber.

Lehr. Seht, wenn das Doppelte, das Dreifache, Vierfache u. s. w. einer unbekannten Zahl gleich ist 10, wieviel dann die Zahl sey.

Antw. Im ersten Falle ist sie 5, im 2ten 3 ⅓, im 3ten 2 ½ u. s. w.

Auflösung. Wenn das Doppelte einer unbekannten Zahl gleich ist 10, so ist die einfache 5, denn die einfache ist von der doppelten die Hälfte, folglich auch die Hälfte von der bekannten oder 10 u. s. f.

Das Einfache der unbekannten Zahl ist ⅓ vom Dreifachen, folglich ist sie auch ⅓ von 10 = 3 ⅓ u. s. w.

Wie hier die unbekannte Zahl in Ganzen ausgedrückt wurde, kann sie auch in Brüchen ausgedrückt werden. — Dieses wird in Zukunft ohne Bemerkung der Fall seyn, indem die Zahl in ihrem ganzen Umfange als schon entwickelt vorausgesetzt wird.

Lehr. Seht mit Ziffern auf euern Tafeln, was für Zahlen es seyen, wenn die Hälfte oder ein Drittel, Viertel Fünftel u. s. w. gleich ist 10; desgleichen, wenn $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$ u. s. w. gleich sind 10 u. s. w.; ebenso, wenn $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$ mal die unbekannte Zahl gleich ist 10.

Auflösung des ersten Falls. Wenn die Hälfte einer Zahl gleich ist 10, so ist die andere Hälfte auch 10, und die ganze Zahl ist folglich 2 mal $10 = 20$.

Wenn $^2/_3$ einer Zahl gleich sind 10, so ist ein Drittel von ihr die Hälfte von 10, weil er auch die Hälfte von $^2/_3$ ist, die ganze Zahl hat $^3/_3$tel, folglich 3 mal $5 = 15$. Auf diese und ähnliche Arten werden alle diese Fragen und Reihenfolgen gelöst, welches gewiß einem Jeden überlassen werden darf, insofern bestimmt vorausgesetzt wird, daß er die vorhergehenden Zahlübungen genugsam kennt.

Hier ist immer eine bekannte Zahl mit einer unbekannten verglichen worden; daß dieses auch mit mehreren bekannten vorgenommen werden darf, folgt schon aus der unorganischen Bildung der Zahl 2c.

§. b.

Eine unbekannte Zahl mit 2 bekannten verglichen.

Eine unbekannte Zahl, oder das Doppelte von ihr u. s. w. ist gleich $10 + 2$, oder gleich $10 + 30$ u. s. w.; welches indessen nur unwichtig ist; dafür ist aber eine bekannte zu einer unbekannten gesetzt, weit wichtiger.

Wenn eine unbekannte Zahl mehr 10, gleich ist 30, was wird diese Zahl seyn?

Antw. 20.

Auflösung. Zu der unbekannten Zahl muß man 10 hinzusetzen, bis sie gleich wird 30, also ist die unbekannte Zahl allein um 10 weniger als 30, welches 20 ist.

Frage: Wenn das Doppelte einer unbekannten Zahl + 10, oder das Dreifache + 10, oder das Vierfache + 10 gleich ist 100; wieviel wird diese unbekannte Zahl in jedem Fall seyn?

Antw. Im ersten Fall ist sie 45, im 2ten 30, im 3ten 22 ½ u. s. w.

Auflösung. Wenn das Doppelte einer unbekannten Zahl mehr 10, gleich ist 100, so machen die 100 das Doppelte dieser Zahl mehr 10 aus; thut man von der doppelten Zahl mehr 10 die 10 weg, so muß man von ihrem Gleichen oder 100 auch 10 wegthun, 10 von 100 bleibt 90, also ist das Doppelte dieser Zahl 90, und das Einfache der halbe Theil von 90 = 45. Ist das Dreifache der Zahl mehr 10 = 100, so ist aus obigem Grunde das Einfache der 3te Theil von 90 ꝛc.

Lehr. Seht, bei was für einer Zahl ihre Hälfte + 10 = 100 mache, bei welcher ihr 3tel + 10 = 100 ꝛc. mache.

Dasselbe kann mit ⅔, ¾, ⅘ ꝛc., auch mit 1 ½, 2 ¾ mal ꝛc. der Zahl vorgenommen werden. Hier folgen, als Anleitung, ein Paar Fragen im Allgemeinen.

Fr. ⅘ einer Zahl mehr 3 sind 10; es fragt sich: was dieses für eine Zahl sey?

Fr. 2. ¾ mal eine unbekannte Zahl mehr 10 ½ sind 40; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Wie bisher in den bekannten Zahlen meistens nur Ganze angegeben wurden, so können auch Ganze und Brüche, und

nur Brüche allein, angegeben werden; dieses würde jedoch das im Kopf Rechnen erschweren und die Hauptanstrengung nur auf etwas Unwichtiges leiten. Hier ist der geistige Schluß die Hauptsache. Deswegen wird man auch sehen, daß ich den Brüchen und andern verwickelten Verhältnissen, besonders wenn sie in der Zahl schon entwickelt sind, soviel als möglich auszuweichen suche.

Wie bisher eine unbekannte Zahl mit 1 und 2 bekannten verglichen worden ist, so könnte sie noch mit 3, 4 rc. verglichen werden, wenn dieses nicht zu unwichtig wäre. Wichtiger wird dafür das Vergleichen einer unbekannten Zahl mit ihr selbst mehr einer, und hernach, zweier bekannten.

§. c.

Eine unbekannte Zahl mit ihr selbst, mehr einer bekannten, verglichen.

Lehr. Stellt eine Zahl auf, wovon die einfache + 10 gleich ist der doppelten, hernach wo die einfache + 11 gleich ist der doppelten, und setzet das so fort bis 20.

Sie werden für die 1ste Zahl 10, für die 2te 11 rc. finden.

Auflösung. Eine Zahl mehr 10 ist gleich dem Doppelten dieser Zahl. Die einfache Zahl ist gleich der einfachen, thut man nun von der einfachen + 10 eine einfache, und von der doppelten das Gleiche weg, so hat man Gleiches von Gleichem weggethan, und es bleibt Gleiches; folglich ist 10 gleich der einfachen unbekannten Zahl, oder diese Zahl ist 10. Auf diese Art läßt man sie die andern Fälle auflösen.

Auf diese Art können sie andre ähnliche Reihenfolgen auf der Schiefertafel mit Ziffern aufstellen; auch kann man

sie solche Reihenfolgen laut mit einander und einzeln vorsprechend behandeln lassen. Hier folgen nur noch einige Aufgaben.

Fr. Wieviel ist eine Zahl, deren 7faches gleich ist dem 4fachen von ihr mehr 12?

Antw. Diese Zahl ist 4.

Auflösung. Das 7fache einer unbekannten Zahl ist gleich dem 4fachen derselben mehr 12. Das 4fache dieser unbekannten Zahl ist gleich dem 4fachen, thut man von der 4fachen mehr 12 die 4fache und von der 7fachen ebenfalls die 4fache weg, so hat man Gleiches von Gleichem weggethan und es bleibt Gleiches; auf der einen Seite bleibt das 3fache der unbekannten Zahl, und auf der andern 12, folglich bleibt für die 3fache Zahl 12, oder für die einfache der 3te Theil von 12 = 4.

Auf eine ähnliche Art werden alle folgenden Aufgaben gelöset.

Fr. Wenn das Doppelte einer unbekannten Zahl gleich ist 1 ½ mal dieser Zahl mehr 21; wieviel wird dann diese Zahl seyn?

Antw. 42.

Fr. Das 10fache einer unbekannten Zahl ist gleich dem Doppelten, mehr der Hälfte von ihr mehr 50; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 6 ⅔.

Fr. Man denkt eine Zahl, wovon 3 ½ mal dieselbe gleich ist 2 ⅓ mal derselben Zahl + 10, es fragt sich: wieviel sie sey?

Antw. 8 ⁴⁄₇.

Auflösung. 3 ½ mal diese Zahl ist gleich 2 ⅓ mal dieselbe mehr 10; thut man Gleiches von Gleichem weg, so

bleibt Gleiches; thut man auf der einen Seite 2 1/3 mal diese unbekannte Zahl weg, so bleibt noch 10, und auf der andern Seite 1 1/6 mal dieselbe Zahl; folglich machen 7/6 dieser Zahl, oder 7/6 sind gleich, 10; 1/6 ist der 7te Theil von 7/6, folglich macht er auch den 7ten Theil von 10 = 10/7, und die ganze Zahl also 6 mal 10/7 = 60/7 = 8 4/7 ꝛc.

§. d.

Eine unbekannte Zahl mehr einer bekannten mit der nämlichen unbekannten Zahl, mehr einer bekannten ꝛc. verglichen.

Lehr. Seht, wenn das Doppelte einer unbekannten Zahl + 10 gleich ist dem 3fachen mehr 1; hernach, wenn das Doppelte + 10 gleich ist dem 3fachen + 2 ꝛc.; wieviel werden diese unbekannten Zahlen in jedem Falle seyn?

Antw. Im ersten Falle ist sie 9, im 2ten 8 ꝛc.

Auflösung. Das Doppelte einer unbekannten Zahl + 10 ist gleich der dreifachen + 1; thut man auf der einen Seite das Doppelte dieser unbekannten Zahl weg, so muß man auf der andern Seite ebensoviel wegthun, wenn noch Gleiches bleiben soll, also ist 10 gleich der einfachen + 1, und nach §. b. wird diese unbekannte Zahl 9. Auf die nämliche Art wird man die Auflösung für den 2ten Fall finden.

Fr. Seht, wieviel die Zahl sey, deren Hälfte mehr 100 gleich ist 2/3 von ihr mehr 60?

Antw. Die Zahl ist 240.

Fr. Wenn das 3fache einer unbekannten Zahl + 7 gleich der 10fachen Zahl mehr 1/2 Ganze, wieviel wird dann diese unbekannte Zahl seyn?

Antw. Die Zahl ist 13/14.

§. e.

Von dem Vergleichen einer unbekannten Zahl durch das unorganische Aufheben.

Wie das Hinzusetzen oder Bilden durchgeführt wurde, so kann auch das Abziehen oder Aufheben geschehen. Ich werde hier nur einzelne der wichtigen Fragen geben, indem die Reihenfolgen aus dem oben Dargestellten hinlänglich deutlich sind. Hier kann das negative und positive Verhältniß mit einer bekannten und unbekannten Zahl im eigentlichen Sinne noch nicht vorgenommen werden, denn etwas Positives kann nicht gleich seyn dem Negativen; man kann nicht sagen: eine positive Zahl sey gleich einer negativen; wird aber angegeben: weniger eine unbekannte Zahl sey gleich weniger 10, so ist auch diese unbekannte Zahl positiv gleich 10 positiv; die weitere Ausführung davon ist wie bei den positiven Zahlen, welches deswegen ganz unwichtig ist.

Fr. Wenn man von einer Zahl 10 ½ wegthut, so bleibt nichts; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. Sie ist 10 ½. Denn wenn man von einer Zahl 10 ½ wegthut, und nichts mehr bleibt, so ist das Weggethane so groß als die Zahl selber, und folglich 10 ½.

Wenn man von dem 10fachen einer Zahl 35 wegthut, so bleibt nichts; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 3 ½.

Fr. Man thut von der Hälfte einer Zahl 7 ½ weg, und es bleibt nichts mehr; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 15.

Fr. Von welcher ⅘telsfachen Zahl kann man 10 wegthun, daß nichts mehr bleibt?

Antw. Von der ⅘telsfachen Zahl von 12 ½.

Auflösung. Eine $\frac{4}{5}$telsfache Zahl ist $\frac{4}{5}$ der ganzen unbekannten Zahl, und wenn man 10 von ihr wegthut, so bleibt nichts; folglich sind diese 10 so groß als $\frac{4}{5}$ dieser Zahl; $\frac{1}{5}$ ist der 4te Theil von $\frac{4}{5}$, folglich auch der 4te Theil von $10 = 2\frac{1}{2}$; die ganze Zahl hat $\frac{5}{5}$, folglich 5 mal $2\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ rc.

Fr. Von $2\frac{2}{3}$ mal einer Zahl kann man 100 wegthun, bis nichts mehr bleibt; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Wie bisher immer nichts blieb, so kann man die Aufgaben auch so machen, daß noch etwas bleibt, oder, daß etwas Fehlendes oder Negatives bleibt.

Fr. Man thut von einer Zahl 10 weg, und es bleibt noch 1; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 11.

Auflösung. Wenn man von einer Zahl 10 wegthut, und nichts mehr bleiben würde, so wäre die Zahl gerade 10; nun bleibt aber noch 1, folglich muß diese unbekannte Zahl auch um 1 mehr als 10 oder 11 seyn.

Fr. Man thut vom 3fachen einer unbekannten Zahl $20\frac{1}{2}$ weg, und es bleibt noch $4\frac{1}{2}$; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. Die Zahl ist $8\frac{1}{3}$.

Die Auflösung ist wie oben.

Fr. Wenn man von $\frac{2}{7}$ einer unbekannten Zahl $14\frac{1}{2}$ wegthut, so bleibt noch $\frac{1}{3}$; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. $51\frac{11}{12}$. Denn wenn man von $\frac{2}{7}$ dieser Zahl $14\frac{1}{2}$ wegthut, und nichts mehr bleiben würde, so wären diese $\frac{2}{7}$ gerade $14\frac{1}{2}$; nun bleibt aber noch $\frac{1}{3}$, folg-

lich sind diese $^{2}/_{7}$ um $^{1}/_{3}$ mehr als 14 ½ oder 14 und ⅚, und wenn $^{2}/_{7}$ einer Zahl 14 ⅚ sind, so ist die ganze Zahl, nach §. a, 51 $^{11}/_{12}$.

Fr. Von 4 ¼ mal einer Zahl wird 20 weggethan, und es bleibt noch 10; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 7 $^{1}/_{17}$.

Wer die weitere Ausführung noch für nöthig findet, wird leicht im Stande seyn, sie zu machen.

Fr. Wenn man von einer Zahl 30 wegthut, so bleibt: 1stens 1 weniger als nichts, oder man hat 1 zuviel weggethan, oder 1 negativ; 2tens bleiben 2 weniger als nichts rc.; es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl in jedem Fall sey?

Antw. Im 1sten Fall ist sie 29, im 2ten 28 rc.

Auflösung. Wenn man von einer Zahl 30 wegthut, und 1 weniger als nichts bleibt, oder man 1 zuviel weggethan hat, so ist die Zahl 30 um 1 zu groß, oder um 1 zu viel; 30 ist nun um 1 mehr als 29, folglich ist die unbekannte Zahl im 1sten Fall 29.

Fr. Wenn man vom Doppelten, Dreifachen, Vierfachen rc. einer Zahl 100 wegthut, so thut man 10 zu viel weg, oder es bleiben 10 weniger als nichts; es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyn?

Antw. Im 1sten Falle ist sie 45, im 2ten 30 rc.

Auflösung. Wenn man 100 vom Doppelten einer Zahl wegthut, und nichts mehr übrig bleiben würde, so wäre dieses Doppelte gerade 100; nun thut man durch dieses 10 zu viel weg, folglich ist 100 um 10 zu groß; 100 ist um 10 mehr als 90, folglich ist das Doppelte dieser Zahl 90 und das Einfache 45. Bei dem Dreifachen wird sie aus dem nämlichen Grunde 30 rc.

Fr. Man thut vom 10fachen einer Zahl 10 ½ weg, und es bleibt noch 1 weniger als nichts; es fragt sich: wieviel die Zahl sey?

Antw. Die Zahl ist $^{19}/_{20}$.

Fr. Man thut von der Hälfte einer unbekannten Zahl 7 weg, und es bleibt $^{2}/_{3}$ weniger als nichts; es fragt sich: wieviel die Zahl sey?

Antw. 13 ⅓.

Fr. Wenn man von $^{4}/_{5}$ einer Zahl 90 ⅓ wegthut, so bleiben noch 10 negativ; es fragt sich: wieviel die Zahl sey?

Antw. 100 $^{5}/_{12}$.

Fr. Wenn man von 10 ½ mal einer unbekannten Zahl 70 wegthut, so bleibt noch 79 weniger als nichts; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. Die Zahl ist $^{2}/_{21}$.

Fr. Man thut 70 von einer Zahl weg, und es bleibt 70 weniger als nichts; es fragt sich: was dieses für eine Zahl oder Größe sey?

Antw. Die Zahl ist Nichts.

(Hier höre ich schon eine Menge Leser rufen: Was! Was! Nichts soll eine Zahl oder Größe seyn? Bei der Angabe weiß ich noch nicht, daß es Nichts wird, es könnte ebensowohl eine Zahl werden; in dieser Beziehung kann ich also mit vollkommnem Rechte Zahl sagen. Daß diese Fragen in die Reihenfolgen gehören, wird aus folgenden Aufgaben und aus dem Grundsatze: daß das Nichts der Mittelpunkt zwischen dem Positiven und Negativen ist, deutlich werden.)

Auflösung. Wenn man von einer Zahl 70 wegthut, und gerade Nichts bleiben würde, so wäre diese Zahl 70;

nun thut man dadurch 70 zu viel weg, folglich ist 70 um 70 zu groß; 70 ist um 70 mehr als nichts, folglich findet man hier statt einer Zahl Nichts. Das Nämliche kann man mit dem Doppelten, Dreifachen und Vierfachen einer unbekannten Zahl und Theilen derselben vornehmen.

Fr. Wenn man von einer Zahl 70 wegthut, so bleiben 71 weniger als nichts; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 1 weniger als nichts oder 1 negativ.

Auflösung. Wenn man von einer Zahl 70 wegthut, und nichts mehr bleiben würde, so wäre die Zahl 70; würde aber 70 weniger als nichts bleiben, so wäre sie nach der vorhergehenden Auflösung Nichts; nun ist sie aber nicht um 70 weniger als Nichts, sondern um 71, folglich ist das Nichts noch um 1 zu groß oder zu viel. Nichts ist um 1 mehr als 1 weniger als Nichts, folglich ist die Zahl 1 weniger als Nichts oder 1 negativ.

Fr. Wenn man vom Doppelten einer Zahl 100 wegthut, so bleiben 120 weniger als nichts; es fragt sich: was dieses für eine Zahl sey?

Antw. Die Zahl ist 10 weniger als nichts.

Die Auflösung ist ganz wie oben, nur daß statt des Einfachen das Doppelte der unbekannten Zahl bleibt.

Fr. Man thut von ¼ einer unbekannten Zahl 20 weg, und es bleibt 24 weniger als nichts; es fragt sich: wieviel die Zahl sey?

Antw. 16 negativ.

Auflösung. Wenn man von ¼ einer Zahl 20 wegthut, und nichts bleiben würde, so wäre das 4tel dieser Zahl

gerade 20; würde 20 weniger als nichts bleiben, so wäre sie um 20 kleiner oder nichts; nun ist sie nicht um 20, sondern um 24 weniger als nichts, folglich ist das Nichts noch um 4 mehr als das 4tel der unbekannten Zahl; Nichts um 4 mehr als 4 weniger als nichts, folglich ist das 4tel der Zahl 4 weniger als nichts, und die 4/4 um 4 mal 4 = 16 weniger als nichts; also ist die Zahl: 16 negativ.

Probe. Das 4tel von 16 negativ ist 4 negativ, thut man 20 weg, so erhält man 20 negativ; nun hat man aber im 4tel der Zahl schon 4 negativ, 20 und 4 negativ machen 24 negativ.

Die Probe auf eine 2te Art gemacht:

Wenn man von nichts 20 wegthut, so erhält man 20 negativ; von nichts bis auf 4 weniger als nichts sind noch 4 negativ, also zusammen 24 negativ.

Fr. Man thut von 9/10 einer Zahl 20 weg, und es bleibt 40 weniger als nichts; es fragt sich: wieviel die Zahl sey?

Fr. Man thut von 4 ½ mal einer unbekannten Zahl 40 weg, und es bleibt 100 ½ weniger als nichts; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Auch kann die unbekannte mit ihr selber und einer bekannten auf diese Art verglichen werden.

Fr. Wenn man von einer unbekannten Zahl 10 wegthut, so bleibt noch 2/3 dieser unbekannten Zahl; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 30.

Auflösung. Wenn man 10 von einer Zahl wegthut, und noch 2/3 von ihr bleibt, so muß das weggethane 10 das

3te Drittel machen, denn die Zahl hat 3/3, und wenn 1/3 10 ist, so ist die ganze Zahl, die 3/3 hat, 3 mal 10 = 30.

Auf eine andre Art aufgelöset: Wenn man 10 von einer Zahl wegthut, so bleibt noch 2/3 derselben, folglich sind 2/3 derselben so groß als die Zahl weniger 10; thut man 2/3 der Zahl auf der einen Seite, und dasselbe auf der andern weg, so hat man Gleiches von Gleichem weggethan, und der Rest ist gleich; auf der einen bleibt nichts, und auf der andern 1/3 der Zahl weniger 10, und wenn 1/3 einer Zahl weniger 10 nichts ist, so heben die 10 das 3tel auf, wenn 1/3 10 beträgt, so wird die ganze Zahl 3 mal 10 = 30. Auf diese 2 verschiedene Arten können alle hier folgenden Aufgaben gelöst werden.

Fr. Wenn man von dem Doppelten einer Zahl 10 wegthut, so bleibt noch 2 1/3 der Zahl; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Wenn man von 2 3/4 mal einer Zahl 100 wegthut, so bleibt noch 1 1/5 mal die Zahl; es fragt sich: wieviel die Zahl sey?

Auch hier kann man wieder auf das Negative hinuntersteigen.

Fr. Wenn man von einer unbekannten Zahl 10 wegthut, so bleibt die unbekannte Zahl weniger als nichts, oder das Doppelte, Dreifache, Vierfache dieser Zahl weniger als nichts; es fragt sich: wieviel die Zahl in jedem Falle sey?

Antw. Im 1sten Falle ist sie 5, im 2ten 3 1/3.

Auflösung. Wenn man 10 von einer Zahl wegthut, und nichts mehr bleiben würde, so wäre sie nach den vorhergehenden Auflösungen 10; nun bleibt aber nicht nur nichts, sondern noch die Zahl weniger als nichts, folglich sind die

10 noch um die Zahl zu groß; oder man thut dadurch, daß man die 10 von der Zahl wegthut, die Zahl selber weg, mehr noch die Zahl, oder 2 mal die Zahl; wenn 2 mal die Zahl 10 macht, so ist 1 mal dieselbe 5 ꝛc.

Fr. Wenn man von 10 ½ 2 mal die unbekannte Zahl wegthut, so bleibt noch 1 mal dieselbe negativ; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 10 ½.

Probe. Ist diese Zahl richtig, so muß beim doppelten Wegthun von der einfachen noch 10 ½ negativ bleiben; 2 mal 10 ½ von 10 ½ weggethan, bleibt noch 10 ½ weniger als nichts, oder die Zahl negativ.

Fr. Wenn man zum negativ 10fachen einer unbekannten Zahl 100 hinzusetzt, so erhält man weniger ½ mal diese unbekannte Zahl; es fragt sich: wieviel wird diese unbekannte Zahl seyn?

Fr. Man thut zu ⅘ einer unbekannten negativen Zahl 100 hinzu, und man erhält 10 mehr als nichts; oder sie wird 10 positiv; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Wenn man zum 4 ½fachen einer Zahl negativ, 100 hinzusetzt, so erhält man die Zahl positiv, oder sie wird gleich der positiven Zahl; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Wie man diese Ansicht weiter ausführen kann, wird aus diesen einzelnen Aufgaben deutlich werden, doch ist es nicht nöthig, daß man gar ins Verwickelte gehe; ich gehe deswegen zum folgenden §. über, und gebe als Beispiele nur noch ein Paar Aufgaben im Allgemeinen.

Fr. Wenn man zu 10½ einer negativen unbekannten Zahl 100 hinzusetzt, so erhält man 3mal die positive Zahl — 40; wieviel wird diese Zahl seyn?

Fr. Wenn man zu 3⅔ mal einer unbekannten negativen Zahl 100 hinzusetzt, so erhält man ⅔ mal die unbekannte Zahl negativ, mehr 10 negativ; wieviel wird diese Zahl seyn?

Anleitung und Zusammenfassung dieses §. für den Lehrer.

Hier giebt es in jedem §. für den Lehrer 2 wichtige und selbstständige Ansichten.

Die 1ste ist die Sache oder die unbekannte Zahl mit bekannten in ihrem ganzen Umfange, unabhängig vom Menschen.

Die 2te ist hingegen das Kind, oder die Art und Weise, wie das unmündige Kind durch diese wesentlichen und selbstständigen Ansichten der Zahl geführt werden müsse, um es zur Mündigkeit zu erheben.

Hier folgt das Skelet der Zahl. In den Uebungen trennte ich das negative Verhältniß von dem positiven; dieses that ich aber nicht um der Zahl, sondern um des Kindes willen.

Eine unbekannte Zahl kann

1stens mit einer bekannten in Gleichheit gesetzt werden;

2tens mit 2 bekannten, und zwar die unbekannte mehr einer bekannten mit einer bekannten.

Eine unbekannte mit 2 bekannten ist unwichtig.

3tens kann die unbekannte mehr einer bekannten mit ihr selbst in Gleichheit gesetzt werden.

Eine unbekannte mehr sich selbst mit einer bekannten in Gleichheit gesetzt, wird ebenfalls unwichtig.

4tens kann eine unbekannte mehr einer bekannten, mit ihr selbst mehr einer bekannten, in Gleichheit gesetzt werden.

Sobald mehr als eine bekannte oder unbekannte Zahl auf einer Seite der Vergleichung ist, verliert das Wesen der Ansicht, indem es mehr in Zahlenverbindungen als in wesentliche und charakterisirende Verhältnisse der unbekannten Zahl mit bekannten führt.

Wird das negative Verhältniß mit diesen 4 verschiedenen Formen vereinigt, so giebt es im 1sten Falle, wo die unbekannte mit einer bekannten verglichen wird, keine Aufgaben, indem entweder beide positiv oder beide negativ seyn müssen. Im 2ten Falle kann: a) die unbekannte negativ und die 2 bekannten positiv; b) die eine bekannte negativ und die beiden andern positiv; c) eine bekannte und die unbekannte negativ und die andre positiv; d) beide bekannte negativ und die unbekannte positiv seyn. Sind alle 3 negativ, so findet bei ihnen wieder alles statt, wie bei 3 positiven.

Bei der Verbindung des positiven und negativen Verhältnisses kommt man auf das Nichts, das jedesmal den Uebergang von dem negativen in das positive Verhältniß anzeigt.

Alle diese Veränderungen lassen sich im 3ten Falle machen, im 4ten findet das nämliche nur mit einer größern Anzahl statt.

Wäre das Kind schon entwickelt und kräftig, so würde es hinlänglich seyn, wenn man ihm von jeder dieser Ver-

änderungen eine Aufgabe gebe; weil dieses aber nicht ist, so müssen in diesen Veränderungen Aufgaben gemacht werden, die von einem einfachen und leichten Anfang nothwendig und sicher zu allen verwickelten Reihenfolgen fortschreiten. Bevor ich aber zu den Aufgaben übergehe, bemerke ich noch: daß diese Aufgaben, besonders für den Anfang, noch nicht hinlänglich sind; es müssen daher Reihenfolgen von Verhältnissen und Aufgaben aufgestellt werden, die Kinder müssen dieselben einzeln und zusammen laut vorsprechen, und dann noch mit Ziffern auf der Schiefertafel als Erinnerungsmittel zu Zeiten aufzeichnen; ohngefähr wie es in meinem Heft über die Zahl geschah. Doch auch hierüber geben die Aufgaben und Reihenfolgen dieser §§. genugsame Auskunft.

Reihenfolgen der Aufgaben für das zu entwickelnde Kind.

Im 1sten Falle wird eine unbekannte Zahl mit einer bekannten in Gleichheit gesetzt, diese wird für folgenden Zweck: a) durch die Einheit, b) durch das Hinaufsteigen über die Zahl oder Einheit, c) durch das Hinuntersteigen unter dieselbe ausgedrückt.

a lautet in der Aufgabe: Eine unbekannte Zahl ist = 10.

b, das Doppelte, 3, 4fache ist gleich 10.

c, die Hälfte, 3tel, 4tel rc. ist gleich 10.

Ferner kann das Hinauf- und Hinuntersteigen, über und unter die Zahl, vereinigt werden; woraus sich folgende Aufgaben ergeben: 1 ½, 2 ½ mal rc. eine unbekannte Zahl machen 10; oder ⅔, ¾, ⅘ mal eine unbekannte Zahl machen dieses.

Ganz gleiche Veränderungen können auch mit der bekannten vorgenommen werden; ferner können alle diese Veränderungen der bekannten und unbekannten noch vereiniget werden, wodurch alle Fälle mathematisch erschöpft würden, welches aber nicht nöthig ist. Es ist hier mehr um den Geist der Verbindung, als um das Erschöpfen zu thun. — Bei dem 2ten, 3ten und 4ten Falle sind die Verbindungen noch unendlich mannichfaltiger.

Hier hat man das Skelet, nach dem die Reihenfolgen der Zahl bei einem unmündigen Kinde gemacht werden müssen.

Als Schluß bemerke ich noch: daß dieses in allen §§. auf die nämliche Art statt findet, und deswegen nicht mehr wiederholt wird; ich werde es in der Ausführung der §§. machen, daß sich dieser Geist überall aussprechen muß.

Eine Anschauung oder ein äußeres Anschauungsmittel soll man hier nicht mehr brauchen; wer sich nicht zur innern, geistigen Anschauung erhoben hat, kann entweder die Zahlenverhältnisse nicht, oder er ist zu jung an Jahren. Die Kraft der Vernunftschlüsse kommt erst mit den Jahren.

§. 3.

Eine unbekannte Zahl in allen möglichen Beziehungen organisch bildend mit 1, 2, 3 ꝛc. bekannten Zahlen in Gleichheit gesetzt.

§. a.

Eine unbekannte, mit einer bekannten, auf obige Art in Gleichheit gesetzt.

Um dieses zu thun, müßte die unbekannte Zahl durch sich selber multiplizirt werden, welches uns gleich in die 2te

Potenz führen, und folglich hier noch zu schwer seyn würde; ich werde deswegen gleich zu einer unbekannten, mit 2 bekannten in Gleichheit gesetzt, übergehen.

§. b.

Eine unbekannte Zahl organisch bildend und aufhebend, mit 2 bekannten in Gleichheit gesetzt.

Fr. Wenn man eine Zahl mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 rc. multiplizirt, so erhält man 100, oder so wird das Herausgekommene gleich 100; es fragt sich: wieviel diese Zahl in jedem Falle sey?

Antw. Im 1sten ist sie 100, im 2ten 50, im 3ten 33 ⅓ rc.

Auflösung. Wenn man eine Zahl mit 1 multiplizirt, so erhält man 1 mal die Zahl; multiplizirt man sie mit 2, so erhält man das Doppelte; bei 3 das Dreifache der Zahl; denn Multiplizиren heißt: die Zahl so viel mal nehmen, als das 1, 2, 3 rc. Einheiten hat. Wenn das Einfache der Zahl gleich ist 100, so ist die Zahl auch gleich 100; ist die doppelte gleich 100, so ist die einfache gleich 50 rc.

Als Vorübung kann man den Kindern hier zuerst noch ähnliche Aufgaben geben.

Wieviel mal erhält man eine unbekannte Zahl, wenn man sie mit 1, 2, 3, 4 rc. multiplizirt? wieviel mal, wenn man sie mit ½, ⅓, ¼ rc. ⅔, ¾ rc. multiplizirt? wieviel mal, wenn man sie mit 2 ½, 2 ¾ multiplizirt? rc. Doch absolut nothwendig sollen diese Uebungen hier nicht mehr seyn.

Fr. Wenn man eine Zahl mit ½, ⅓, ¼ ꝛc. multiplizirt, so erhält man 80; wieviel wird diese Zahl in jedem Falle seyn?

Antw. Im 1sten ist sie 160, im 2ten 240, im 3ten 320 ꝛc.

Auflösung. Eine Zahl mit ½, ⅓ ꝛc. multiplizirt, heißt: sie so oft wiederholen, als dieses Halbe, 3tel, 4tel ꝛc. Ganze sind; das Halbe ist der halbe Theil von einem Ganzen, folglich muß es beim Multipliziren des Halben ½ mal wiederholt werden, und dafür bekommt man in der Angabe 80; wenn also ½ mal die unbekannte Zahl 80 ist, so wird die ganze Zahl 2 mal 80 = 160; beim Multipliziren des 3tels wird der 3tel 80, und folglich die ganze Zahl 3 mal 80 = 240.

Probe. 160 mit ½ multiplizirt, giebt die Hälfte von 160 = 80; 240 mit dem 3tel multiplizirt, giebt den 3tel von 240 = 80.

Fr. Eine unbekannte Zahl ist mit ⅞ multiplizirt worden, und dadurch hat man 100 erhalten; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. Die Zahl ist 114 2/7.

Auflösung. Eine Zahl mit ⅞ multiplizirt, heißt: dieselbe ⅞ mal nehmen, dafür bekommt man nach der Angabe 100, also sind diese 100, ⅞ mal die unbekannte Zahl, und wenn 100 = ⅞ sind, so ist ⅛ der 7te Theil von 100 = 14 2/7, die ganze Zahl hat 8/8, foglich 8 mal 14 2/7 = 114 2/7.

Fr. Wenn man eine Zahl mit 4 ¾ multiplizirt, so erhält man 60; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 12 und 12/19.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist die Verbindung der obigen. Wie die unbekannte Zahl durch eine bekannte multiplizirt, und hernach mit einer bekannten in Gleichheit gesetzt wurde, so kann dieses auch mit der bekannten vorgenommen werden, welches jedoch unwichtiger ist. Als Beleg folgen hier ein Paar Aufgaben.

Fr. 100 mit ⅔ multiplizirt, wird gleich einer unbekannten Zahl; oder der Hälfte; oder 2⅔ mal der unbekannten Zahl.

Fr. 100 mit 2½ multiplizirt, wird gleich der Hälfte, dem 3tel rc. der unbekannten Zahl.

Wie das Multipliziren durchgeführt wurde, so kann das Dividiren behandelt werden. Auch als Vorübung können wieder zuerst einige Aufgaben über das Dividiren im Allgemeinen gemacht werden. Z. B. Wieviel erhält man, wenn man eine unbekannte Zahl mit 1, 2; 3 rc. dividirt; wenn man sie mit ½; ⅓, ¼ rc. dividirt?

§. c.

Eine unbekannte Zahl dividirend mit 2 bekannten durchgeführt.

Fr. Es wird eine Zahl mit 1; 2, 3 oder 4 dividirt, und man erhält 100; es fragt sich: wieviel jedesmal die Zahl sey?

Antw. Im 1sten Falle ist sie 100; im 2ten 200, im 3ten 300 rc.

Auflösung. (Dividiren heißt sehen, wie oft eine Zahl in der andern enthalten sey, oder wie oft man sie von einer andern wegthun könne.)

Wenn eine Zahl mit 1 dividirt wird, und 100 herauskommt, so ist 1, 100 mal in der Zahl enthalten; folglich ist diese Zahl auch 100 mal 1, oder 100.

Wenn eine unbekannte Zahl mit 2 dividirt wird, und 100 herauskommt, so muß 2 in dieser unbekannten Zahl 100 mal enthalten seyn; 2 ist in 2 1 mal enthalten, und bei dem 100-maligen Enthaltenseyn muß diese Zahl also 100 mal 2 oder 200 seyn.

Auf eine andre Art aufgelöset:

So oft 2 in der unbekannten Zahl enthalten ist, so oft ist sie auch 2; nun ist nach der Angabe 2, 100 mal in derselben enthalten, folglich ist sie auch 100 mal 2 oder = 200.

Auf eine dritte Art aufgelöset:

Eine Zahl mit 2 dividirt, giebt die Hälfte der Zahl, und wenn die Hälfte einer unbekannten Zahl gleich ist 100, so wird diese ganze Zahl 2 mal 100 = 200 seyn.

Wie diese und ähnliche Aufgaben auf die mannichfaltigste Art gelöset werden können, wird aus diesem klar seyn.

Fr. Es ist eine unbekannte Zahl mit $\frac{1}{3}$ dividirt worden, das Resultat davon ist 80; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. $26\frac{2}{3}$.

Auflösung. Eine Zahl mit $\frac{1}{3}$ dividiren, heißt sehen, wie oft $\frac{1}{3}$ in derselben enthalten sey. In unserer unbekannten Zahl ist $\frac{1}{3}$ 80 mal enthalten; folglich hat diese unbekannte Zahl 80 mal $\frac{1}{3}$, gleich $\frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$.

Fr. $\frac{4}{5}$ ist in einer unbekannten Zahl 100 mal enthalten, oder eine Zahl mit $\frac{4}{5}$ dividirt, giebt 100; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 80.

Die Auflösung wird ganz auf obige Art gemacht.

Fr. Wenn eine Zahl mit 4 ½ dividirt wird, so erhält man 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 450.

Auflösung. 4 ½ ist in 4 ½ 1 mal enthalten; so oft 4 ½ in der unbekannten Zahl enthalten ist, so oft muß diese Zahl auch 4 ½ seyn. Nach der Angabe ist 4 ½ in derselben Zahl 100 mal enthalten; folglich ist sie auch 100 mal 4 ½ = 450.

Auch hier kann die bekannte Zahl statt der unbekannten mit einer bekannten Zahl dividirt werden, z. B. 100 mit $\frac{1}{5}$ dividirt, wird gleich einer unbekannten Zahl, oder gleich der Hälfte, dem 3tel ꝛc. dieser unbekannten Zahl?

Man wird sehen, daß in diesem §. auf eine unbekannte Zahl mit 2 bekannten organisch bildend ausgedrückt, dieses aufhebend folgte, während das Erste im §. 2. ganz durchgeführt wurde. Ich that es, um zu zeigen, daß diese Trennung nicht Hauptsache sey.

Obige Aufgaben noch auf eine andre Art ausgedrückt:

Fr. Mit welcher Zahl muß 10 multiplizirt werden, wenn es 20, 30, 40 ꝛc. geben soll?

Antw. Wenn es 20 geben soll, so muß 10 durch 2, bei 30 durch 3 ꝛc. multiplizirt werden.

Auflösung. Um 10 zu bekommen, muß man 10 mit 1 multiplizirēn; um 20 zu bekommen, muß man es mit 2 rc. multiplizirēn, denn 20 ist 2 mal 10, folglich muß 10 2 mal genommen, oder mit 2 multiplizirt werden.

Auf eine andere Art aufgelöset:

Wird diese unbekannte Zahl mit 10 multiplizirt, so erhält man 10 mal die unbekannte Zahl, und wenn 10 mal eine unbekannte Zahl 20, oder 30, oder 40 rc. ist, so beträgt die einfache Zahl den 10ten Theil von 20, von 30 rc.

Fr. Mit welcher Zahl muß 20 multiplizirt werden, wenn es ½, oder ⅓, oder ⅘ geben soll?

Antw. Für den 1sten Fall mit $\frac{1}{40}$, für den 2ten mit $\frac{1}{60}$, für den 3ten mit $\frac{1}{25}$.

Auflösung. Wenn die unbekannte Zahl mit 20 multiplizirt werden soll, um ½ zu bekommen, so muß die 20fache unbekannte Zahl gleich werden ½, und wenn eine 20fache Zahl gleich wird ½, so ist die einfache gleich dem 20sten Theil von ½ = $\frac{1}{40}$ rc.

Fr. Mit welcher Zahl muß 100 dividirt werden, wenn das Resultat davon 1, 2, 3 rc. werden soll?

Antw. Um 1 zu bekommen, muß 100 mit 100 dividirt werden; um 2 zu bekommen, mit 50; um 3 zu bekommen, mit 33 ⅓ rc.

Auflösung. Die unbekannte Zahl muß im 1sten Falle gerade in 100 1 mal enthalten seyn; folglich ist sie 100. Im 2ten Falle muß sie 2 mal in 100 enthalten seyn, folglich muß die einfache Zahl die Hälfte von 100, oder 50 rc. seyn.

Fr. Mit welcher Zahl muß man 100 dividiren, wenn man ½, oder ⅓, oder ¼ erhalten soll?

Antw. Um ½ zu erhalten, muß man es mit 200, um ⅓ zu erhalten, mit 300 rc. dividiren.

Auflösung. Soll 100 mit einer unbekannten Zahl so dividirt werden, daß man ½ erhält, so muß diese unbekannte Zahl nur ½ mal in 100 enthalten seyn; und wenn die unbekannte Zahl nur ½ mal in 100 enthalten seyn soll, so muß die Hälfte derselben so groß als 100 seyn, und wenn die Hälfte 100 ist, so wird die ganze unbekannte Zahl 2 mal 100 = 200. Soll ⅓ beim Dividiren herauskommen, so wird der 3tel der Zahl 100 seyn, und die ganze Zahl hat ³⁄₃, folglich 300 rc.

Fr. Beim Dividiren des 100 durch eine unbekannte Zahl hat man ⅘ erhalten. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 125.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz wie die vorhergehende.

Fr. Wenn man 80 durch eine unbekannte Zahl dividirt, so bekommt man 4 ½; es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 17 ⁷⁄₉.

Wie hier eine unbekannte Zahl unter allen Formen des Multiplizirens, und hernach des Dividirens zu einer bekannten gesetzt worden ist, so können diese 2 Formen mit einander verbunden werden, welches hier nicht ganz am unrechten Orte steht, wiewohl die Verbindung eigentlich erst auf eine andre Stufe gehört. Weil aber diese zwei Ansichten so innig

mit einander verbunden sind, so lasse ich die Verbindung gleich folgen.

Fr. Es ist eine Zahl mit 2 multiplizirt worden; was heraus kam, wurde mit 3 dividirt, und dadurch entstand 100; es fragt sich: welches diese Zahl sey?

Antw. 150.

Auflösung. Wenn man eine Zahl mit 2 multiplizirt, so erhält man 2 mal die 1ste unbekannte Zahl. Dividirt man das Doppelte dieser 1sten Zahl mit 3, so erhält man den 3ten Theil vom Doppelten der Zahl, oder ⅔ derselben, und wenn man für dieses 100 angiebt, so macht die Zahl, wie im vorhergehenden §. angegeben ist, 150.

Probe. 150 mit 2 multiplizirt, giebt 300, und 300 mit 3 dividirt, giebt 100, welches angegeben wurde; folglich ist diese unbekannte Zahl 150.

Fr. Wenn man eine Zahl mit 4 multiplizirt, und was herauskommt, mit ½ dividirt, so erhält man 44. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 5½.

Fr. Eine Zahl wird mit ½ dividirt, und was herauskommt, mit 10 multiplizirt, und das Resultat davon ist 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 5.

Auflösung. Dividirt man diese unbekannte Zahl mit ½, so erhält man das Doppelte der Zahl, denn ½ ist im Ganzen 2 mal enthalten; multiplizirt man dieses Doppelte mit 10, so bekommt man 10 mal das Doppelte, oder 20 mal das Einfache, und wenn die 20fache Zahl 100 ist, so wird die einfache der 20ste Theil von 100 = 5.

Fr. Man dividirt eine unbekannte Zahl mit 4 ½, und was herauskommt, wird mit 4 ⅓ multiplizirt, und dadurch entsteht 300. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 311 $\frac{7}{13}$.

Auflösung. Wenn man eine Zahl mit 4 ½ dividirt, so erhält man $\frac{2}{9}$ der Zahl, denn 4 ½ sind $\frac{9}{2}$, und 1 Ganzes hat 2 Halbe. 9 Halbe sind in 2 Halben $\frac{2}{9}$ mal enthalten; folglich erhält man durch das Dividiren mit 4 ½, $\frac{2}{9}$ der Zahl. Wird dieses mit 4 ⅓ multiplizirt, so bekommt man 4 ⅓ mal $\frac{2}{9}$ dieser Zahl; $4\frac{1}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{9} + \frac{2}{27}$, zusammen $\frac{26}{27}$ der Zahl, und wenn $\frac{26}{27}$ einer Zahl 300 betragen, so macht $\frac{1}{27}$ den 26sten Theil von 300 gleich 11 $\frac{7}{13}$, und die ganze Zahl hat 27 solcher Theile, also 27 mal $11\frac{7}{13} = 311\frac{7}{13}$.

Daß dieses auch abgekürzt gemacht werden kann, wird aus der Behandlungsart der Zahl schon hinlänglich deutlich seyn.

§. d.

Eine unbekannte Zahl multiplizirend und dividirend zu 3 bekannten gesetzt.

Fr. Wenn man eine unbekannte Zahl mehr 10 mit 3 ½ multiplizirt, so erhält man 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 18 $\frac{4}{7}$.

Die Auflösung ist so leicht, daß man gewiß keine Schwierigkeiten finden wird.

Fr. Wenn man eine unbekannte Zahl + 3 ½ mit ⅔ multiplizirt, so erhält man 800. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 1196 ½.

Fr. Wenn man eine unbekannte Zahl, weniger 10, mit 10 multiplizirt, so erhält man nichts, oder 1, oder 2 ꝛc. Es fragt sich: wieviel diese Zahl in jedem Falle sey?

Antw. Im 1sten Falle ist sie 10, im 2ten 10 $\frac{1}{10}$, im 3ten 10 $\frac{2}{10}$.

Auflösung. Wenn man eine unbekannte Zahl, weniger 10, mit 10 multiplizirt, und dadurch nichts entsteht, so hebt das negative 10, 10 mal genommen, auch das 10malige der unbekannten Zahl auf; folglich ist das 10malige der unbekannten Zahl 10 mal 10, oder 100, und die einfache Zahl ist der 10te Theil von 100 = 10. Bleibt dadurch noch 1, so hebt das 100 negativ das 10fache der Zahl bis auf das Eins auf, folglich ist in diesem Falle das 10fache um 1 mehr als 100, oder 101 ꝛc.

Fr. Man multiplizirt eine unbekannte Zahl weniger 10 mit $\frac{4}{5}$, und erhält 100 positiv. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Wenn man eine unbekannte Zahl weniger 20 mit 3 multiplizirt, so erhält man weniger 10, oder 10 negativ. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 16 $\frac{2}{3}$.

Auflösung. Wenn man diese unbekannte Zahl weniger 20 mit 3 multiplizirt, so erhält man die 3fache Zahl weniger 3 mal 20 = 60. Würde dadurch nichts entstehen, so müßten diese 60 negativ die 3fache Zahl gerade aufheben; nun heben diese 60 noch 10 mehr als die 3fache Zahl auf, folglich ist das 3fache dieser unbekannten Zahl um 10 weniger als 60, oder 50, und wenn das 3fache einer Zahl 50 ist, so wird die einfache Zahl 16 $\frac{2}{3}$.

Fr. Wenn man eine Zahl weniger 10 mit 4 ¾ multiplizirt, so erhält man weniger ½. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Wenn man eine negative Zahl mehr 100 mit 4 multiplizirt, so erhält man 4. Wieviel wird diese Zahl seyn?

Die Auflösung ist wieder ganz gleich der vorhergehenden.

Daß das Dividiren wieder auf die nämliche Art durchgeführt werden kann, wird aus folgenden einzelnen Aufgaben deutlich werden.

Fr. Eine unbekannte Zahl mehr 10 wird durch 1, oder 2, 3 rc. dividirt, und man erhält in jedem Falle 100. Es fragt sich: wieviel jedesmal diese Zahl sey?

Antw. Im ersten Falle ist sie 90; im 2ten Falle 190.

Auflösung. Wenn man eine Zahl mit 1 dividirt, so erhält man die Zahl; wird also diese unbekannte Zahl + 10 durch 1 dividirt, so erhält man diese unbekannte Zahl mehr 10, und wenn eine unbekannte Zahl mehr 10, 100 beträgt, so beträgt die Zahl allein 10 weniger als 100, oder 90.

Dividirt man diese unbekannte Zahl mehr 10 mit 2 so erhält man die Hälfte der Zahl, mehr die Hälfte von 10, = 5, und nach der Angabe bekommt man hiefür auch 100; folglich ist die Hälfte der unbekannten Zahl mehr 5 = 100, und die Hälfte dieser unbekannten Zahl allein ist folglich um 5 weniger als 100, oder 95, die ganze Zahl also 2 mal 95 = 190.

Probe. Soll diese Zahl richtig seyn, so muß dieselbe mehr 10, mit 2 dividirt, 100 geben. 190 mehr 10 = 200 und dieses durch 2 dividirt, giebt 100.

Fr. Wenn man eine unbekannte Zahl mehr 2 durch ⅓ dividirt, so erhält man 40. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Antw. 11 ⅓.

Auflösung. Wenn man eine unbekannte Zahl mehr 2 durch ⅓ dividirt, so erhält man das Dreifache der unbekannten Zahl mehr 6, und wenn das 3fache einer unbekannten Zahl mehr 6 gleich ist 40, so beträgt das 3fache allein 6 weniger als 40, oder 34, und wenn das 3fache einer Zahl gleich ist 34, so wird die einfache 11 ⅓.

Fr. Es wird eine unbekannte Zahl mehr 20 durch ⅚ dividirt, und man erhält 40. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Antw. 13 ⅓.

Die obige Auflösung ist anwendbar.

Fr. Wenn man eine unbekannte Zahl mehr 10 durch 3 ⅓ dividirt, so erhält man 100. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Antw. 323 ⅓.

Auch diese Auflösung ist der obern ziemlich ähnlich.

Fr. Eine unbekannte Zahl weniger 20 mit 2 dividirt, giebt nichts. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. Die Zahl ist 20.

Auflösung. Die negative Zahl 20 muß die unbekannte positive gerade aufheben, denn durch das Dividiren dieser Zahl muß nichts herauskommen. Wäre sie noch etwas, so würde auch etwas durch das Dividiren entstehen ꝛc.

Hier bin ich auf der Stufe, das Verhältniß zu entwikkeln, das negative und positive Größen durch das Multiplizieren und Dividiren zu einander haben, welches aber außerordentlich schwer, und für diese Uebungen unnöthig ist, weswegen ich es hier übergehe, und bei der algebraischen Bezeichnung weiter ausführen werde.

In diesen §§. trennte ich die negativen und positiven Zahlen in der Ausführung nicht mehr, desgleichen das Bilden von dem Aufheben; dieses geschah nur, um den Anfang des §. in einem freiern Licht zu zeigen. Für den, der dieses Abtheilen noch bedarf, ist der 2te §. und der Anfang des 3ten §. hinlänglich ausgeführt.

Fr. Wenn man das Doppelte einer unbekannten Zahl weniger 10 mit 1, 2, 3, 4 ꝛc. dividirt, so erhält man 100. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl in jedem Falle sey?

Fr. Wenn man das Dreifache einer unbekannten Zahl weniger 10 mit ½, ⅓ ꝛc. oder mit ⅔, ¾ ꝛc. oder mit 4½, 4⅓ ꝛc. dividirt, so erhält man 100. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl in jedem Falle sey?

Bisher ist die unorganische Bildung und Aufhebung durch das Multipliziren und Dividiren ausgedrückt worden; dieses kann aber eben so durch das mehrmalige Hinzusetzen und Wegthun der bekannten und unbekannten Zahlen geschehen; wie in der organischen Bildung der Zahl zu sehen.

Das mehrmalige gleiche Hinzusetzen ist die Realform oder der Ausdruck der organischen Bildung, die Form des Multiplizirens ist der Formel Ausdruck; desgleichen ist das mehrmalige gleiche Wegthun und Dividiren im Aufheben.

§. e.

Eine unbekannte Zahl durch die Realform der organischen Bildung mit bekannten in Gleichheit gesetzt.

Fr. Welche unbekannte Zahl muß man 20 mal zu 10 hinzusetzen, um 80 zu erhalten?

Antw. 3½.

Fr. Welche Zahl muß man zu 40 weniger als nichts oder 40 negativ 20 mal hinzusetzen, um 100 positiv zu bekommen?

Antw. 7.

Auflösung. Durch das 20malige Hinzusetzen der unbekannten Zahl muß man 100 positiv erhalten. Zu den 40 negativ muß schon 40 hinzugesetzt werden, um nur nichts zu bekommen; von nichts bis zu 100 positiv muß noch 100 hinzugesetzt werden; folglich muß man durch das 20malige Hinzusetzen 140 bekommen, und durch das 1malige bekommt man den 20sten Theil von 140 = 7 ꝛc.

Welche unbekannte Zahl muß man von 100, 30 mal wegthun, bis sie gleich wird 40?

Fr. Welche unbekannte Zahl muß man von 100 60 mal wegthun, um 10 negativ zu bekommen?

§. f.

Eine unbekannte Zahl mehr einer bekannten mit ihr selbst nach dem 3ten §. in Gleichheit gesetzt.

Daß dieses auch wieder durch mehrmaliges Hinzusetzen und Abziehen ausgedrückt werden kann, bedarf nicht mehr erinnert zu werden. Ich fange deswegen gleich dabey an.

Fr. Wieviel mal muß man zu 100, 1 hinzusetzen, während man zu nichts 2 setzt, bis beide Zahlen einander gleich werden?

Antw. Man muß zu 100, 100 mal 1 hinzusetzen, während man zu nichts 100 mal 2 setzt, bis beide einander gleich werden.

Auflösung. Setzt man zu 100, 1, so setzt man zu nichts 2 hinzu, also setzt man zu nichts immer 1 mehr, als zu 100; folglich nimmt das jetzige Nichts mit dem jedesmaligen Hinzusetzen um 1 mehr zu als das 100, es fehlen ihm aber 100, um dieses einzuholen; folglich muß man so oft 2 hinzusetzen, als ihm 1 fehlt. Es fehlt ihm aber 100 mal 1, also muß man auch 100 mal 2 hinzusetzen.

Auf eine andre Art aufgelöset:

Das 100 nimmt um einen unbekannten Theil oder eine unbekannte Zahl zu, wie das Nichts um 2 solcher steigt; sollen sie nun einander gleich werden, wie es in der Angabe heißt, so muß 100, mehr diese unbekannte Zahl oder dieser unbekannte Theil gleich seyn 2 mal dieser unbekannten Zahl, folglich wird das Einfache der unbekannten Zahl mehr 100 gleich dem Doppelten ꝛc.

Fr. Wie oft muß man zu 100, ⅔ hinzusetzen, während man zu nichts 2 setzt, bis beide einander gleich werden?

Fr. Welche unbekannte Zahl muß mit 3½ multiplizirt werden, bis ihr Produkt gleich wird dem Produkt derselben unbekannten Zahl und 2, wenn man zu diesem Produkt noch 100 hinzugefügt hat?

Antw. 66⅔.

Daß auch diese Auflösungen wieder ähnlich der obigen sind, bedarf für den, der sich über den Ausdruck oder die

Form erhoben hat, nicht mehr bemerkt zu werden; und für den andern hat es kein anderes Mittel, als wieder weiter vorne anzufangen.

Daß ähnliche Fragen über das Dividiren und Wegthun gemacht werden können, wird man wissen. Ich überlasse diese einem jeden.

§. 8.

Eine unbekannte Zahl mehr einer bekannten auf obige Art mit ihr selber mehr einer bekannten verglichen.

Fr. Wie oft muß man zu 100, 1 hinzusetzen, während man zu 10, 3 setzt, bis beide Zahlen einander gleich werden? Oder auf eine andre Art ausgedrückt:

Wenn man eine unbekannte Zahl mit 1 multiplizirt, und diese zu 100 hinzusetzt, so erhält man diese unbekannte Zahl mit 3 multiplizirt mehr 10. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Auch diese Auflösung ist wieder gleich der vorhergehenden.

Fr. Wenn man eine unbekannte Zahl mit 2 dividirt, und das Resultat von 100 abzieht, so erhält man diese unbekannte Zahl mit 3 dividirt von 90 abgezogen. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Auf eine andre Art ausgedrückt:

Wieviel mal muß man ½ von 100 wegthun, bis es gleich wird 90, wenn man von 90 jedesmal ⅓ wegthut?

Antw. Dieses muß 60 mal geschehen.

Auflösung. Wenn man von 100, ½ wegthut, so thut man von 90, ⅓ weg; ½ und ⅓ findet man in den 6teln, denn ½ = 3/6 und ⅓ = 2/6, folglich nimmt 100 jedesmal um 1/6 mehr ab, als 90; 100 ist um 60/6 mehr als 90, folglich muß man dieses ½ auch 60 mal von dem 100 wegthun, bis es gleich wird dem 90, wenn man jedesmal ⅓ wegthut.

Auf eine andere Art aufgelöset:

Von 100 thut man die Hälfte der unbekannten Zahl weg, während man von 90, ⅓ derselben wegthut; folglich ist 100, weniger der Hälfte der unbekannten Zahl, gleich 90 weniger ⅓ derselben. Die fernere Auflösung geht wie im 2ten §.

Auch dividirend ausgedrückt kann eine solche Auflösung gemacht werden.

Fr. Wie oft muß man zu 100, 1 hinzusetzen, während man von 400, 3 abzieht, bis beide einander gleich werden?

Antw. 60 mal.

Auflösung. Während man zu 100, 1 hinzusetzt, zieht man von 400, 4 ab, folglich wird 100 beim jedesmaligen Hinzusetzen um 1 mehr, als es war, und das 400 beim Abziehen um 4 weniger, folglich nähern sich beide Zahlen jedesmal um 4 mehr 1 oder 5, so oft also 5 in dem, was 400 mehr ist als 100, enthalten ist, so oft muß 1 zur einen hinzugesetzt und 4 von der andern abgezogen werden.

Fr. Eine unbekannte Zahl mit 2 multiplizirt, mehr 100, ist gleich dieser Zahl mit 2 dividirt + 300. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Die negativen Zahlen können wieder gleich behandelt werden.

Fr. Wie oft muß man zu 100 negativ 3 hinzusetzen, während man zu 100 positiv 1 setzt, bis sie gleich werden?

Antw. 100 mal muß dieses geschehen.

Auflösung. Bis die Zahl 100 weniger als nichts gleich wird 100 positiv, braucht es 200; denn es bedarf von 100 negativ bis nichts schon 100 rc. Jedesmal setzt man zu 100 negativ 3, während man zu 100 positiv nur 1 setzt, folglich nimmt die negative Zahl immer um 2 mehr zu, als die positive. So oft als 2 in dem, was die negative weniger ist, als die positive, enthalten ist, so oft muß zur negativen 3 hinzugesetzt werden, während zur andern 1 gesetzt wird rc.

Fr. Wie oft muß man von 200 positiv 1 wegthun, während man zu 100 negativ 2 hinzusetzt, bis beide Zahlen einander gleich werden?

Antw. 100 mal.

Auflösung. Von 200 positiv thut man die unbekannte Zahl 1 mal weg, während man sie zu 100 negativ 2 mal hinzusetzt. Wenn sie durch dieses einander gleich werden sollen, wie es in der Angabe heißt, so ist die negative unbekannte Zahl mehr 200, gleich 100 negativ, mehr 2 mal der Zahl positiv. Die fernere Auflösung ist schon im 2ten §. enthalten.

Der Zusammenhang dieses §., wie auch die Ausführung, ist ganz gleich, wie im 2ten; deswegen übergehe ich dieses, besonders da der Lehrer eben so an Einsicht und Behandlung zunehmen soll, wie der Schüler an Kraft. Ich bemerke nur noch im Vorbeigehen, daß wie hier immer nur einzelne Aufgaben gegeben werden, sich aus jeder Aufgabe leicht Reihenfolgen und Bedingungen für die Schüler

machen lassen, wozu meine Form- und Größenlehre, wie auch das Heft über die Zahl hinlängliche Anleitung geben. Ferner daß die organische Bildung und Aufhebung jede 2 wichtige und wesentliche Ausdrücke hat, nämlich den formellen und realen, und daß diese unter allen Formen wie 4 verschiedenartige Dinge verbunden werden können, welches mit der Ansicht des 2ten §. eine außerordentliche Mannichfaltigkeit giebt. Zu erschöpfen ist es möglich, aber unnöthig; der §. selber giebt hinlängliche Auskunft.

§. 4.

Eine unbekannte Zahl durchs Mehr und Weniger, oder durch die unorganische Vergleichung zu bekannten in Gleichheit gesetzt.

§. a.

Eine unbekannte mit 2 bekannten auf diese Art verglichen.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 10, 11, 12 rc. größer wäre, als sie ist, so wäre sie 100. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Antw. Im 1sten Falle ist sie 90, im 2ten 89 rc.

Auflösung. Wenn eine unbekannte Zahl um 10 größer wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie 100; also mit der Bedingung, wenn sie um 10 größer wäre, als sie ist, wird sie erst 100, und ohne diese Bedingung ist sie also um 10 kleiner, oder 90 rc.

Fr. Wenn das Doppelte einer unbekannten Zahl um 10 größer wäre, als es ist, so wäre es 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Das Gleiche nimmt man mit der Hälfte, dem 3tel ꝛc., ⅔, ⅘, 1 ½, 2 ⅔ einer unbekannten Zahl vor.

Hier folgen noch ein Paar Fragen über das Weniger.

Fr. Wenn ⅘ einer unbekannten Zahl um 10 weniger wären, als sie wirklich sind, so wären sie 100. Es fragt sich: wieviel die unbekannte Zahl sey?

Fr. Wenn 2 ⅔ mal eine unbekannte Zahl um 10 weniger wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie 80. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Antw. 33 ¾.

Auflösung. Wenn 2 ⅔ mal eine unbekannte Zahl um 10 weniger wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie 80; folglich beträgt diese gesammte Zahl mit der Bedingung, wenn sie um 10 kleiner wäre, 80. Nun ist sie in der Realität, oder ohne diese Bedingung nicht um 10 kleiner, also 80 mehr 10, oder 90, und wenn 2 ⅔ einer Zahl 90 beträgt, so ist die Zahl ⅜ von 90 = 33 ¾.

Auf eine andere Art aufgelöset:

Wenn 2 ⅔ einer Zahl um 10 kleiner wäre, als sie ist, so wäre sie 80; folglich beträgt 2 ⅔ der Zahl mehr 10, 100, und wenn dieses ist, so kann die fernere Auflösung ganz nach dem 2ten §. gemacht werden.

Daß man hier, wie bei allen selbstständigen Ansichten, auch zu dem Weniger als nichts, oder dem Negativen hinuntersteigen könne, wird in Zukunft ohne Bemerkung immer folgen.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 10 kleiner wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie 3 ½ negativ. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 6 ½.

Auflösung. Wenn eine unbekannte Zahl um 10 kleiner wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie 3 ½ negativ. Wäre sie mit dieser Bedingung gerade nichts, so würde die Bedingung 10 die Zahl gerade aufheben; nun hebt sie die Zahl auf, und noch 3 ½, folglich ist 10 um 3 ½ mehr als die Zahl. 10 ist um 3 ½ mehr als 6 ½.

Auch können alle diese Aufgaben ganz nach dem 2ten §. gelöset werden; deswegen werde ich die Auflösungen einem jeden überlassen, und nur einige Aufgaben machen.

Fr. Wenn das 3fache einer unbekannten Zahl um 100 weniger wäre, als es wirklich ist, so wäre es 10 negativ. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Fr. Wenn ⅞ einer unbekannten Zahl um 70 kleiner wäre, als es wirklich ist, so wäre es weniger 10. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Wie bisher eine unbekannte Zahl mit 2 bekannten verglichen wurde, so kann die unbekannte mit 3 bekannten, oder mit 2 bekannten und ihr selber rc. verglichen werden, worüber ich nur noch einige Aufgaben geben werde, ohne den 4ten §. weiter in untergeordnete §§. einzutheilen.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 10 mehr wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie gleich dem 3fachen der unbekannten Zahl. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Wenn das Doppelte einer unbekannten Zahl um 11 größer, oder mehr wäre, als es ist, so wäre es gleich dem 4 ½fachen der unbekannten Zahl. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Wenn das 10fache einer unbekannten Zahl um 10 weniger wäre, als es wirklich ist, so wäre es die unbekannte

Zahl (weniger oder mehr nach diesem oder jenem Theile der unbekannten Zahl)?

Fr. Wenn das 3fache einer unbekannten Zahl um 10 mehr wäre als es wirklich ist, so wäre es gleich dem Doppelten mehr 100; wieviel wird diese unbekannte Zahl seyn?

Daß das Mehr und Weniger auch hier wieder durch den Unterschied ausgedrückt werden kann, wird durch ein Paar Fragen deutlich werden.

Daß der Unterschied die größere Zahl weniger der kleinern ist, soll man aus der Zahl schon wissen, doch kann man dieses hier noch allgemeiner durch einen geistigen Schluß zeigen. z. E. Von der kleinern Zahl zur größern hat es das, was die kleinere weniger ist als die größere, welches man Unterschied nennt. Wenn man also den Unterschied von der größern wegthut, so muß die kleinere bleiben.

Fr. Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 100 ist gleich 80. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Antw. 20 oder 180.

Daß es hier 2 Zahlen giebt, die diesem entsprechen, ergiebt sich ganz einfach aus der Angabe, denn man kann als die größere die bekannte oder unbekannte annehmen; im 1sten Falle erhält man 20, im 2ten 180. Einige Reihenfolgen hierüber sind nicht unwichtig, werden aber leicht nach der Anleitung des 2ten §. gemacht werden können.

Fr. Wenn der Unterschied zwischen dem Doppelten einer unbekannten Zahl und 100 gleich ist nichts; so fragt es sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. Diese Zahl ist 50.

Auflösung. In dieser Aufgabe weiß man, daß der Unterschied zwischen dem Doppelten der unbekannten Zahl und 100 nichts ist; folglich hebt 100 das Doppelte der unbekannten Zahl auf, und so ist 100 auch gleich dem Doppelten der Zahl, und die einfache wird 50. Wäre der Unterschied 40, so würde es wieder 2 Zahlen geben, die diesem entsprechen würden, denn die bekannten 100 oder das Doppelte der unbekannten kann die größere seyn. Ich nehme an, die bekannte sey die größere; wenn man also das Doppelte der unbekannten von 100 wegthut, so muß noch 40 bleiben, also ist dieses um 40 mehr als das Doppelte der unbekannten; 100 ist um 40 mehr als 60, folglich ist die einfache Zahl 30. Angenommen, das Doppelte der unbekannten sey die größere, so erhält man aus obigen Gründen für das Doppelte der unbekannten 100 + 40 oder 140, und für das Einfache der unbekannten 70.

So kann man angeben, daß das 40 fehle, oder 40 negativ bleibe. Eine weitere Ausführung dieser Reihenfolgen und Aufgaben ist sehr interessant, kann aber leicht von Jedermann, der das Vorhergehende verstanden hat, weiter ausgeführt werden.

Fr. Wenn der Unterschied zwischen dem Dreifachen einer unbekannten Zahl und 100 gleich ist dem Einfachen dieser Zahl; so fragt es sich: wieviel diese Zahl sey?

Auflösung. Hier giebt es ebenfalls 2 Fälle, entweder ist die bekannte, oder das 3fache der unbekannten Zahl größer. Angenommen, die bekannte sey größer. Die größere weniger der kleinern ist der Unterschied; folglich erhält man in dieser Aufgabe den Unterschied, wenn man 3 mal die unbekannte Zahl von 100 abzieht, wodurch man die unbekannte Zahl bekommt; folglich hebt das 3fache der unbekann-

ten Zahl 100 auf, und es bleibt noch einmal die Zahl, also machen die 100 das 3fache derselben mehr das 1fache, oder das 4fache, und das 1fache wird der 4te Theil von 100 = 25.

Auf ähnliche Art wird die Aufgabe gelöset, wenn man das 3fache der unbekannten Zahl als die größere ansieht; in diesem Falle erhält man den Unterschied, wenn man 100 vom 3fachen der unbekannten Zahl abzieht, wodurch man dann noch die 1fache unbekannte Zahl zum Unterschiede bekommt; folglich hebt 100 von dem 3fachen der unbekannten Zahl das 2fache auf, und wenn das 2fache gleich ist 100, so ist das 1fache = 50.

Fr. Der Unterschied zwischen der Hälfte einer unbekannten Zahl und 100 ist gleich dem 5fachen dieser unbekannten Zahl. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

(Hier ist die bekannte Zahl die größere; denn wenn man die größere von der kleinern abzieht, so bleibt nichts Positives; und in dieser letzten Aufgabe bleibt noch 5 mal die unbekannte Zahl positiv.)

Nicht unwichtig ist es, wenn man die Kinder, nachdem sie ähnliche Aufgaben auf diese Art durchgeführt haben, bestimmen läßt: Welche Eigenschaften diejenigen Aufgaben haben, bei denen 2 Antworten Statt finden können?

Als Leitfaden werde ich noch ein Paar Aufgaben über das negative Verhältniß geben.

Fr. Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl negativ und 100, macht 600. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 500,

Auflösung. In dem Unterschiede vom Negativen zum Positiven ist das Negative positiv, mehr das Positive enthalten; (denn von dem Negativen bis auf das Nichts mangelt das Negative positiv, und vom Nichts bis auf das Positive die positive Zahl selbst). In dieser Aufgabe ist das Negative die unbekannte Zahl, das Positive ist 100, folglich ist die Zahl mehr 100 gleich 600, und nach dem 2ten §. wird sie durch eine fernere Auflösung 500.

Fr. Der Unterschied zwischen der Hälfte einer Zahl negativ und 60 ist 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Wenn der Unterschied zwischen dem Doppelten einer Zahl, und 100 negativ 700 macht; so fragt es sich ebenfalls: wieviel diese Zahl sey?

Wie in dem vorhergehenden §. die Zahl mit sich selbst verglichen wurde, so kann dieses auch hier, wie in allen folgenden §§. geschehen, welches ich in Zukunft nicht mehr anmerken werde.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 10 mehr wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie gleich dem 3fachen dieser Zahl, wenn sie um 1 mehr wäre, als sie ist. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 9.

Auflösung. Das Doppelte dieser Zahl, wenn es um 10 größer wäre, würde gleich dem 3fachen seyn, wenn es 1 mehr wäre; folglich kann man sagen: das Doppelte mehr 10 sey gleich dem 3fachen mehr 1 ꝛc.

Fr. Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl negativ und 100 positiv, macht 6 mal die unbekannte Zahl positiv. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 20.

Auflösung. Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl negativ und 100 positiv macht die unbekannte Zahl positiv mehr 100, und dieses ist, nach der Angabe, 6 mal die unbekannte Zahl, und einmal die unbekannte Zahl wird, nach dem 2ten §. der 5te Theil von 100 = 20; denn auf beiden Seiten der Gleichheit (oder wie man es nennt, in beiden Gliedern der Gleichheit) eine unbekannte Zahl weggethan, giebt auf einer Seite oder in einem Gliede 100, und eine andere 5 mal die unbekannte Zahl ꝛc.

Fr. Wieviel wird die Zahl seyn, deren Unterschied zwischen dem 4fachen dieser Zahl und 200 negativ, 20 ½ mal diese unbekannte Zahl beträgt?

Wenn eine unbekannte Zahl um 10 mehr wäre, als sie ist, so wäre sie gleich dem 3fachen der Zahl weniger 1. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Aehnliche Aufgaben sind wichtiger durch den Unterschied ausgedrückt.

Fr. Der Unterschied zwischen dem 3fachen einer unbekannten Zahl und 100 macht das Doppelte der Zahl, mehr 1000. Es fragt sich, wieviel diese Zahl sey?

Es ist nicht mehr nöthig, daß solche verwickelte Aufgaben auf dieser Stufe gelöset werden; ich setzte sie nur hieher, um zu zeigen, wie weit solche Ansichten ausgeführt werden können, um dem Kräftigen auch für seine Kraft ein anpassendes und noch weiter führendes Feld zu zeigen. Kräftiger Jüngling! du sollst durch dieses fühlen und erkennen lernen, daß, je weiter du bist, desto weiter du noch kommst und mußt, um den Gipfel zu erreichen.

§. 5.

Vom Theilen.

Wie das Theilen einer Zahl, als Vorübung zur organischen Vergleichung angesehen und betrieben wurde, so kann es auch hier geschehen; doch ist dieses nicht sehr wichtig, wenn nicht Bestimmungen anderer §§. damit verbunden werden, welches ich am Ende der reinen Uebungen folgen lassen werde.

Hier sind indessen ein Paar unbedeutendere Aufgaben.

Fr. Wenn man 100 in 2, 3, 4, 5 ꝛc. gleiche Theile theilt; wieviel wird in jedem Falle ein solcher Theil seyn?

Fr. Wenn man 100 in 2 gleiche Theile theilt, und hernach einen davon in 2, und den andern in 3; wieviel wird ein solcher Theil?

Fr. Wieviel wird ein jeder Theil, wenn man 100 in 3 Theile theilt, wovon einer 30 und die beiden andern gleich sind?

Fr. Wieviel wird ein jeder Theil, wenn man 100 so in 4 Theile theilt, daß der eine = 40, die andern 3 aber gleich werden? ꝛc. ꝛc.

§. 6.

Eine unbekannte Zahl organisch vergleichend mit einer und mehreren bekannten und ihr selbst in Gleichheit gesetzt.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl 1, 2, 3, 4 mal ꝛc. so groß ist, als 10; wieviel wird diese unbekannte Zahl seyn?

Antw. Im 1sten Falle ist sie 10, im 2ten 20, im 3ten 30 rc.

Auflösung. Die unbekannte Zahl ist 1 mal so groß, als sie selbst, folglich ist sie auch 10. Ist die unbekannte Zahl 2 mal so groß als 10, so beträgt die Zahl selbst 2 mal so viel als 10 oder 20 rc. rc.

Fr. Eine unbekannte Zahl ist 1 ½ mal so groß als 10. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 15.

Auflösung. Wenn die unbekannte Zahl 1 ½ mal so groß ist als 10, so beträgt diese Zahl 1 ½ mal dieses 10 oder 15 rc.

Fr. 10 ist 2, 3, 4, 5 mal so groß, als eine unbekannte Zahl; es fragt sich: wie groß sie sey?

Auch hierüber findet die obige Auflösung statt.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl 2 mal so groß wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 50.

Auflösung. Die unbekannte Zahl hat ihre Größe 1 mal; wenn sie noch 1 mal so groß wäre, so würde sie mit dieser Bedingung die Größe noch einmal bekommen, wofür man eine Zahl von 100 erhielte; die einfache wird die Hälfte von dem Doppelten rc.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl 2 mal größer wäre, als sie ist, so wäre sie 100; es fragt sich: wieviel sie sey?

Antw. 33 ⅓.

Auflösung. Die unbekannte Zahl hat 1 mal ihre Größe; wenn sie 2 mal größer oder mehr wäre, so bekäme sie noch 2 mal diese Größe; 1 mal die Größe mehr 2 mal die Größe gleich 3 mal dieselbe, und wenn 3 mal eine Größe 100 macht, so macht 1 mal dieselbe den 3ten Theil davon = 33 ⅓.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 4 ½ mal größer wäre, als sie ist, so wäre sie 100. Es fragt sich: wieviel eine solche Zahl sey? rc.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl 3 mal, 4 mal rc. kleiner wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie weniger 100, oder 100 negativ. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Antw. Im 1sten Falle ist sie 50, im 2ten 33 ⅓ rc.

Auflösung. Eine unbekannte Zahl kann um 1 mal ihre Größe kleiner seyn, bis nichts mehr von ihr da ist; ist sie also um 3 mal ihre Größe kleiner, so bekommt man 2 mal diese Zahl negativ, und wenn 2 mal die negative Zahl 100 negativ beträgt, so ist 1 mal dieselbe die Hälfte von 100 = 50; wenn nun das Negative einer Zahl 50 negativ beträgt, so beträgt das Positive derselben auch 50 positiv.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 1 ½ mal ihre Größe kleiner wäre, als sie ist, so wäre sie 60 negativ; wieviel wird diese Zahl seyn?

Fr. Eine unbekannte Zahl mehr 10 ist 2 mal, 3 mal, 4 mal rc. so groß als 100. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Auflösung. Wenn die unbekannte Zahl gerade 2 mal so groß als 100 wäre, so hätte diese Zahl 2 Theile, wie 100 einen hat; folglich wäre die unbekannte Zahl 2 mal 100

= 200; nun ist sie aber mit dem 10 erst 2 mal so groß, folglich ist sie allein um dieses kleiner; 10 von 200 weggethan, bleibt noch 190 rc.

Der unorganischen und organischen Vergleichung liegt die unorganische und organische Bildung zu Grund; dieser §. hat besonders die organische Bildung, und zwar die durch die Realform ausgedrückte; die multiplizirend und dividirend ausgedrückte ist ihm nicht so eigenthümlich; deswegen werde ich, bei der Ueberschrift der Verbindung des 4ten §. mit andern, hauptsächlich diese Form hineinbringen; obige Fragen und Reihenfolgen auf eine andere Art ausgedrückt.

Fr. Wie oft muß man zu 10, 1 hinzusetzen, bis es mit diesem 2 mal so groß, als 100 wird.

Fr. Wie oft muß man zu 10, 2 hinzusetzen, bis es 2 mal, 3 mal rc. so groß wird, als 100?

Antw. 95 mal muß 2 hinzugesetzt werden.

Auflösung. Wenn 10 durch das Hinzusetzen 2 mal so groß werden soll, als 100, so muß es 200 werden; nun ist es aber schon 10, folglich muß es durch dieses Hinzusetzen nur noch 190 werden; 2 ist in 190, 95 mal enthalten; folglich muß es 95 mal hinzugesetzt werden.

Auf eine ähnliche Art werden alle diese Aufgaben gelöset werden.

Fr. Wie oft muß man zu 20, 3 hinzusetzen, bis es $2\frac{1}{2}$ mal so groß wird, als 100?

Fr. Eine unbekannte Zahl mehr 20, ist $\frac{7}{8}$ mal so groß, als 40. Es fragt sich, wie viel diese unbekannte Zahl sey?

Fr. Eine unbekannte Zahl weniger 10, ist 1 mal, 2 mal, 3 mal rc. so groß, als 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. Im 1ten Fall ist sie 110, im 2ten 210 rc.

Auflösung. Im ersten Fall kann man von der unbekannten Zahl 10 wegthun, bis sie gleich wird 100; folglich muß sie 10 mehr, als 100 oder 110 seyn. — Im 2ten Fall kann man ebenfalls 10 wegthun, bis sie 2 mal so groß wird, als 100; 2 mal so groß, als 100 macht 200; folglich betrug die Zahl, bevor man diese 10 weggethan hatte, 10 mehr, als 200 oder 210.

Fr. Eine unbekannte Zahl weniger 10, ist 3½ mal so groß, als 400. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Wie oft muß man zu 100, 3 hinzuthun, während man zu 300, 1 setzt, bis die 1te Zahl 2 mal so groß wird, als die 2te?

Antw. Zur 1ten muß 500 mal das 3 hinzugesetzt werden rc.

Auflösung. Zu 100 setzt man immer 3 mal die unbekannte Zahl, während man sie zu 300 nur 1 mal setzt; mit diesem sollen aber die 100, mehr das 3 mahlige der unbekannten Zahl, auch 2 mal so groß, als 300, mehr das einfache der unbekannten Zahl, werden; folglich, um sagen zu können, 100 + das 3fache der unbekannten Zahl sey gleich 300 + das einfache der Zahl, muß man die letzte verdoppeln; 2 × 300 = 600, und 2 mal diese Zahl, macht 2 mal die Zahl; folglich ist das 3fache einer unbekannten Zahl, mehr 100 = 600, mehr dem doppelten der unbekannten Zahl. Die fernere Auflösung geht nach dem 2ten §.

Wiewohl diese und ähnliche Aufgaben von mehreren Zöglingen auf diese Art gelöset wurden, so gefiel mir die

Auflösung, wie auch mehreren andern Zöglingen, nicht, indem sie zuviel Formelnschlüsse hatte; hier folgt eine andre, die mehr Beifall fand.

Zu 100 setzt man 3, während man zu 300, 1 setzt; die 1te soll mit diesem 2 mal so groß werden, als die 2te; ich will hier zuerst gleiche Zahlen annehmen, welches die Aufgabe um etwas erleichtert, beide sollen 100 seyn: die 1te soll, durch das obige Hinzusetzen, 2 mal so groß werden, als die 2te. Ich mache daß das Hinzusetzen zur 1ten 2 mal so groß wird, als das Hinzusetzen zur 2ten, wodurch ich zur 1ten 2 hinzuthun muß, während ich zur 2ten 1 hinzu setze; geschieht dieses, so ist das, was ich zur 1ten hinzusetze, immer 2 mal so groß, als das, was ich zur 2ten hinzuthue; wären die bekannten Zahlen zum voraus in diesem Verhältnisse, so würde die 1te auf jeder Stufe 2 mal so groß seyn, als die 2te; nun ist die 1te gleich der 2ten, hat also nur einen Theil, wie die zweite auch nur einen hat, und muß, um 2 mal so groß zu werden, 2 Theile bekommen; folglich muß man durch dasjenige, was man mehr als doppelt so viel hinzusetzt, einen solchen Theil, oder 100 bilden; man setzt 3 hinzu, folglich 1 mehr, als doppelt soviel; 1 ist in 100, 100 mal enthalten, folglich muß man 100 mal 3 zur 1ten und 100 mal 1 zur 2ten setzen.

In dieser Aufgabe kann die erste niemals 3 mal so groß werden, als die 2te, denn das, was man zur 1ten hinzusetzt, ist um 3 mal so groß, als das, was man zur 2ten hinzuthut, und die Zahlen sind im Anfange gleich.

Eben so wenig kann sie 4, 5 mal rc. so groß werden, als die 2te.

Dafür kann sie 1½ mal so groß rc. werden, denn in diesem Falle muß man zur 1ten 3 setzen, während man zur

2ten nur 2 setzt; in der Aufgabe setzt man zur 2ten 1; wenn 1, 2 Theile haben soll, so muß 1 Theil ½ werden; folglich müssen zur 1ten 3/2 gesetzt werden, damit das Hinzuzusetzende 1½ mal so groß werde, als das der 2ten; 1½ von 3 weggethan, bleibt noch 1½, und durch dieses muß die erste Zahl ½ größer werden, als die 2te. Die Hälfte von 100 = 50, so oft nun 1½ in 50 enthalten ist, so oft muß 3 zur 1ten, und 1 zur 2ten gesetzt werden. — 1½ sind in 50, 33⅓ mal enthalten.

Fr. Wie oft muß man zu 100, 1 setzen, während man zu noch Nichts 5 setzt, bis die 2te (oder die erst noch zu bildende Zahl) 3 mal so groß wird, als die 1te?

Auflösung. Zuerst mache ich wieder, daß das Hinzuzusetzende der 2ten, 3 mal so groß wird, als das der 1ten, wodurch ich 1 zur 1ten setze, während ich 3 zur 2ten oder Nichts hinzu setzen muß; nun setzt man aber zur 2ten, 2 mehr, als das 3fache, und durch dieses muß die 2te bestehende Zahl auch 3 mal so groß werden, als die 1te, die 2te ist noch nichts, die 1te 100, 3 mal so viel = 300; 2 ist in 300, 150 mal enthalten, folglich muß 150 mal 1 zur 1ten und soviel mal 5 zur 2ten hinzugesetzt werden.

Die Probe von allen diesen Aufgaben ist so einfach und leicht, daß sie gewiß von jederman leicht gemacht werden kann.

Fr. Wie oft muß man zu 400, 1 setzen, während man zu 100, 7 setzt, bis die 2te 4 mal so groß wird, als die 1te?

Antw. 300 mal.

Auflösung. 100 muß mit den hinzuzusetzenden 7, 4 mal so groß werden, als die 1te, deswegen setze ich gerade 4 mal soviel zu ihr hinzu, als zur 1ten, oder 4, wäh-

rend ich zur 1ten 1 setze; es wird daher 3 mehr als das 4fache zur 2ten gesetzt, und durch dieses muß die bestehende Zahl auch 4 mal so groß gemacht werden, als die 1te. Die 1te ist 400; 4 mal 400 = 1600; nun ist die 2te aber schon 100, folglich muß sie nur noch um 1500 mehr werden; mit dem jedesmaligen Hinzusetzen wird sie um 3 mehr; so oft also 3 in 1500 enthalten, so oft muß dieses geschehen, welches 500 mal ist.

Fr. Wie oft muß man zu 100 negativ, 10 setzen, während man zu 100 positiv oder zu 100, 2 hinzu setzt, bis die 1te 3 mal so groß wird, als die 2te.

Antw. 100 mal.

Auflösung. Ich setze zur negativen im Anfang wieder 3 mal soviel, als zur 2ten, welches 6 bedarf; da ich aber 10 hinzusetze, so thue ich folglich mehr als das 3fache hinzu, wodurch auch die bestehende Zahl 3 mal so groß gemacht werden muß, als die 2te; 3 mal 100 = 300; nun ist die 1te nicht nur Nichts, sondern 100 weniger, als nichts; von diesem bis auf 300 fehlen noch 400; folglich muß die 1te mit den 4, um 400 vergrössert werden, zu welchem man 4, 100 mal bedarf, also muß zur 1ten 100 mal 10 und zur 2ten 100 mal 2 hinzugesetzt werden. 100 mal 10 = 1000.

Probe. 1000 zu 100 negativ macht 900; 100 mal 2 = 200; 200 + 100 = 300; folglich ist sodann die 2te Zahl 3 mal so groß als die 1te.

Mit dem Wegthun kann das Gleiche gemacht werden.

Fr. Wie oft muß man von 400, 5 wegthun, während man von 400, 2 wegthut, bis die eine die Hälfte der andern wird?

Auflösung. Diejenige, von der mehr weggethan wird, muß auch die kleinere werden, (welches keinen Beweis mehr bedarf) nach der Angabe die Hälfte der andern; deswegen thue ich von der kleinern 1 weg, während ich von der grössern 2 wegthue; von der 1ten, oder von derjenigen, die die Hälfte der 2ten wird, thut man 5 weg, während von der 2ten 2 weggethan werden; folglich thut man von der 1ten 4 mehr weg, als zur Hälfte nöthig ist, und dafür muß sie auch um die Hälfte der schon bestehenden Zahl kleiner werden; die beiden Zahlen sind einander gleich, die Hälfte von 100 = 50, 4 ist in 50, 12½ mal enthalten, also muß 12½ mal 5 von der einen, und eben soviel mal 2 von der andern weggethan werden.

Wie weit auch dieses noch ausgedehnt werden kann, wird hinlänglich deutlich seyn, wenn man diesen §. mit den vorhergehenden vergleicht. Ich höre mit der Bemerkung auf, daß ich nach Grundsätzen diesen §. ohne eine geordnete Reihenfolge durchführte, indem sich das Kind hier über diese Form erheben soll; daß es auch hier, wie bei allen selbstständigen Ansichten, bei den verwickelteren Verbindungen, Aufgaben und Reihenfolgen giebt, die unendlich schwerer sind, als die einfachen und ersten einer neuen Ansicht; dieses gilt bei allen §§.

Ehe ich 2 unbekannte Größen auf eben diese Art in allen möglichen Beziehungen zu 1, 2, und mehreren bekannten durchführe, will ich die bisher gehabten §§. mit einander verbinden. — Absolut nothwendig sind aber diese Verbindungen nicht mehr; ich werde sie daher nur in gedrängter Kürze durchführen, und besonders alle unwichtigen Verbindungen übergehen.

Den 1ten §. mit den andern verbunden, gibt keine wichtige Wahrheiten, deswegen wird er überall auch gleich übergangen werden.

Den 2ten §. mit den andern zu verbinden, wäre sehr wichtig, wenn er nicht schon in den wesentlichsten Beziehungen dadurch vorgekommen wäre, daß man eine unbekannte Zahl mit 2 und mehrern bekannten auf die mannichfaltigste Art in Gleichheit setzte; deswegen wird auch dieser gar nicht mehr mit andern verbunden werden. Hier könnte man mich fragen, warum denn der 2te §. schon hinlänglich verbunden mit andern vorkam? Der Grund davon ist, daß das verschiedene äussere Zusammensetzen, in dem eine unbekannte Zahl mit bekannten und ihr selber gesetzt wurde, eigentlich das Wesen des 2ten §. in sich faßte; denn das äußere Zusammensetzen einer unbekannten mit mehreren bekannten und ihr selber ist das Wesen des 2ten §. rc. Auch die Verbindung jedes §. mit sich selber könnte vorgenommen werden, welches ich jedoch meist übergehen werde, indem die wesentlichsten Verbindungen in jedem §. schon vorkamen.

§. 3 mit §. 4 verbunden.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 1, 2, 3 rc. mehr wäre, als sie ist, und dieses mit 2 multiplizirt würde, so bekäme man 100. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl in jedem Fall sei?

Antw. Im 1ten Fall ist sie 49, im 2ten 48 rc.

Auflösung. Wenn eine unbekannte Zahl um 1 mehr wäre, als sie ist, so giebt es mit dieser Bedingung 1 mal die unbekannte Zahl mehr 1; wird dieses mit 2 multiplizirt, so erhält man 2 mal die Zahl, mehr 2; folglich ist das

Doppelte einer unbekannten Zahl mehr 2 = 100, und die einfache Zahl wird nach dem 2ten §. 49 ꝛc.

Fr. Wenn das Doppelte einer unbekannten Zahl um 10 mehr wäre, als es ist, und dieses mit 3 multiplizirt wird, so erhält man 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Wenn man ¾ einer unbekannten Zahl mit 5 multiplizirt, so erhält man die unbekannte Zahl, wenn sie um 100 mehr wäre, als sie ist?

Fr. Wenn man 1½ mal eine unbekannte Zahl mit ⅘ multiplizirt, so erhält man das 10fache der unbekannten Zahl, wenn dasselbe um 30 weniger wäre, als es ist?

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 10 mehr wäre, als sie ist, und dieses dann mit 2 dividirt wird, so erhält man 300. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 20 weniger wäre, als sie ist, und dieses durch ⅓ dividirt wird, so erhält man 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Die weitere Ausführung wird jederman leicht machen können; ich bemerke nur noch, daß hier diese Aufgaben in Rücksicht der Auflösung ähnlich mit der Verbindung des §. 2, mit §. 3 sind, oder dem, wo eine unbekannte Zahl mehr einer bekannten mit einer bekannten verglichen wurde.

Warum dieses statt findet, liegt einfach in der Aufgabe; hier folgen noch ein Paar, die in etwas verschieden sind.

Fr. Der Unterschied, der entsteht, wenn man eine unbekannte Zahl mit 2 dividirt und mit ⅓ multiplizirt,

wird = 100. Es fragt sich: wieviel diese unbekannte Zahl sey?

Antw. 600.

Auflösung. Die unbekannte Zahl mit 2 dividirt giebt die Hälfte, mit ⅓ multiplizirt das 3tel der unbekannten Zahl. Der Unterschied zwischen der Hälfte und ⅓ = ⅙; wenn ⅙ die Zahl = 100 ist, so wird die ganze Zahl = 600.

Fr. 100 ist der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl mit 3 ½ dividirt und mit 10 ½ multiplizirt. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Der Unterschied zwischen 10 negativ und einer unbekannten Zahl positiv wird gleich der unbekannten mit 4 multiplizirt. Es fragt sich; wieviel diese Zahl sey?

Antw. 3 ⅓.

Auflösung. Der Unterschied zwischen 10 negativ und einer unbekannten Zahl positiv wird gleich 10, mehr die unbekannte Zahl; denn von 10 negativ bis auf nichts hat es 10, und von nichts bis auf die Zahl, hat es die Zahl selber, und dieses ist, nach der Angabe, gleich der unbekannten Zahl mit 4 multiplizirt oder dem 4fachen dieser Zahl; wenn 10, mehr die Zahl, gleich ist dem 4fachen, so ist die einfache Zahl nach dem 2ten §. 3 ⅓ ꝛc.

Fr. Der Unterschied zwischen dem Doppelten einer unbekannten Zahl positiv, und 30 negativ wird gleich der unbekannten Zahl mit ⅑ dividirt. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Fr. Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl negativ und 100 positiv ist gleich der Zahl multiplizirt mit 3 ½. (Wenn in Zukunft die Eigenschaft positiv auch

nicht mehr zur Zahl gesetzt wird, so verstehe ich immer, wenn negativ nicht dazu gesetzt wird, positiv.)

Auch die Auflösung dieser Aufgabe ist der obigen gleich.

Fr. Wenn man den Unterschied zwischen 10 negativ und einer unbekannten Zahl mit 3 multiplizirt, so erhält man 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahl sey?

Antw. 23 1/3.

Auflösung. Der Unterschied von 10 negativ bis auf die Zahl selber ist die Zahl mehr 10; dieses mit 3 multiplizirt, giebt 3 mal die Zahl mehr 30, und dafür ist in der Aufgabe 100 gegeben ꝛc.

Fr. Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl negativ und 100, mit 3/8 dividirt, ist gleich 1000. Es fragt sich: wieviel sie sey?

Man wird aus den bisherigen Verbindungen gesehen haben, daß immer nur ein Verhältniß von §. 3 und §. 4 zum Vorschein kam; daß diese aber ebenfalls mehrfach mit einander verbunden werden können, ergiebt sich schon aus der Durchführung der einzelnen §§. Hier folgen über diesen Gesichtspunkt noch einige Aufgaben; dabei bemerke ich noch, daß die Form des Multiplizirens sich auch hier wieder durch die Realform des Multiplizirens und Dividirens ausdrücken läßt.

Fr. Wie oft muß man zu 100, 1 hinzusetzen, während man zu noch nichts 2 setzt, bis die 2te Zahl mit diesem Hinzugesetzten 100 mehr wird, als die 1te?

Antw. 200 mal.

Auflösung. Während man zu 100, 1 hinzusetzt, setzt man zu nichts 2; folglich wird das 2te Verhältniß, das im Anfange noch nichts ist, immer um 1 mehr, als die 1te Zahl; die 1te ist um 100 mehr als das nichts; bis sie

dieses eingehohlt hat, muß sie noch um 100 mal eins mehr zunehmen; folglich um nur gleich zu werden, muß man zur 2ten 100 mal 2 setzen, während man zur 1ten 100 mal 1 setzt: das Gleiche muß geschehn, wenn die 2te noch um 100 mehr seyn soll; folglich muß man in allem 200 mal 1 zur 1ten und 200 mal 2 zur 2ten setzen.

Auf eine andre Art aufgelöset.

Zu 100 setzt man 1 mal die unbekannte Zahl hinzu, während man sie zu nichts 2 mal setzt; die 2te soll mit diesem um 100 mehr seyn, als die 1te; folglich muß das Doppelte einer unbekannten Zahl um 100 mehr seyn, als das Einfache + 100 ꝛc.

Fr. Wie oft muß man zu 10, 4 setzen, während man zu 100, 1, 2, ꝛc. setzt, bis die 1te 100 mehr wird, als die 2te?

Fr. Wie oft muß man zu 100 negativ, 10 hinzusetzen, während man zu 100, 1 setzt, bis die 1te 100 mehr wird, als die 2te?

Auch hier ist die Auflösung, wie die obige.

Fr. Wie oft muß man zu 100 negativ, 1 hinzusetzen, während man von 200, 9 wegthut, bis 200 mit diesem Weggethanenen um 10 weniger wird, als die andere, oder bis die 1te um 10 mehr wird, als die 2te?

Auflösung. Während man zu 100 negativ 1 mal die unbekannte Zahl hinzusetzt, zieht man sie von 200, 9 mal ab, und mit diesem soll die 1te Zahl um 10 mehr werden, als die 2te; folglich ist 1 mal die unbekannte Zahl mehr 100 negativ um 10 mehr als 200, weniger 2 mal diese Zahl ꝛc.

Auch kann das Wegthun und Hinzusetzen von der einen Zahl auf die andere geschehen, z. E.

Fr. Wieviel muß man von 100 weg- und zu 10 hinzusetzen, bis die 2te um 20 mehr wird, als die 1te?

Auflösung. Nach der Angabe muß die 2te Zahl 20 mehr haben, als die 1te; deswegen ziehe ich 20 von 100 ab; der Unterschied, der dann noch Statt findet, wird in 2 gleiche Theile getheilt, und zu jeder Zahl 1 solcher Theil gesetzt; der Unterschied zwischen 10 und 80 ist 70, und dieses in 2 gleiche Theile getheilt giebt für einen Theil 35; und 35 zu 10 gesetzt giebt 45; 20 hat man zum voraus von 100 weggethan, damit man es zur 2ten setzen könne, 45 + 20 = 65.

Auf eine andre Art aufgelöset.

Beide Zahlen mit einander betragen 110, und diese müssen durch das Wegthun von der einen und durch das Hinzusetzen der andern in ein solches Verhältniß gesetzt werden, daß die 2te so groß wird als die 1te mehr 20; wenn man also 20 von der 2ten wegthut, so wird sie gleich der 1ten, und es bleiben noch 2 gleiche Theile; 20 von 110 bleiben noch 90, und 90 in 2 gleiche Theile getheilt, giebt auf ein Theil, oder die Zahl 45, auf die 2te 45 mehr 20 = 65. Wieviel von der einen weg- und zur andern hinzugethan werden müsse, kann leicht bestimmt werden.

Aus diesen einzelnen Aufgaben wird das unendliche Gebiet der verschiedenen §§. hinlänglich deutlich seyn; auf eine ganz gleiche Art können auch die andern §§. noch mit einander verbunden werden, welches ich doch wegen dem zu schwierigen und verwickelten Lösen, erst am Ende noch weiter ausführen werde; besonders da 2 unbekannte Größen oder Zahlen in ihren einfachsten Verhältnissen viel leichtere Aufgaben und Reihenfolgen darbieten.

Bei 2 unbekannten Größen werde ich den bisher eingeschlagenen Gang in etwas abändern. Es folgt nämlich im Anfang gleich die Vergleichung, und zwar die unorganische und organische, und erst darauf 2 unbekannte Zahlen, die unorganisch und organisch bildend in eine Gleichheit gesetzt werden. — Dieses wird nur um unserer Schwäche Willen gethan; aber warum ist hier dieser ungelehrte Gang leichter? Dieses liegt in der Vergleichung; denn, um eine Vergleichung hervor zu bringen, werden 2 Dinge erfordert; 2 Verhältnisse sind durch die beiden unbekannten Zahlen schon gegeben, folglich liegt dieses dem Vergleichen näher.

§. 4. auf 2 unbekannte Größen angewendet.

§. a.

Allgemeine Bestimmung 2 unbekannter Zahlen durch Mehr und Weniger ꝛc.

Sind 2 unbekannte Größen oder Zahlen einander gleich, so ist bei ihnen alles wahr, was bei 1 und 1, bei 2 und 2 ꝛc. statt findet, welches wegen ihrer Gleichheit unwichtig wird.

Lhr. Sucht auf, was ihr von 2 ungleichen Zahlen sagen könnt, das immer und allgemein wahr ist.

Sie werden hier wieder finden, was sie allgemein bei 2 ungleichen Linien in der Größenlehre ꝛc. fanden. Ich werde diese Wahrheiten nicht mehr in ihrem ganzen Umfang wiederhohlen, sondern mich nur auf die wichtigsten und eigenthümlichsten der Zahl beschränken.

Kinder kann man aber dieses ohne Bedenken weiter ausdehnen lassen, z. B. daß der Unterschied von einer kleinern

Zahl zu einer größern, mehr diese kleinere immer gleich sey der größern, oder daß die größere, weniger der Unterschied, immer die kleinere ist; ferner: daß die kleinere mehr der größern, oder die Summe von beiden gleich ist 2 mal der kleineren mehr dem Unterschied, und daß endlich die kleinere weniger die größere gleich sey weniger dem Unterschied, oder es bleibt der Unterschied negativ; thut man die Summe von 2 unbekannten Zahlen von der kleinern weg, so bleibt die größere Zahl negativ; thut man die Summe von 2 unbekannten Zahlen mehr dem Unterschied von ihrer Summe weg, so bleibt der Unterschied negativ ꝛc.

Löset man eine von diesen Fragen auf, so sind mit dieser alle folgende gelöset, z. B. daß die kleinere Zahl mehr dem Unterschiede gleich sey der größern. Von der kleinern Zahl zur größern giebt es etwas, welches man Unterschied nennt; thut man von dieser kleinern das, was von ihr aus bis zur größern hinauf noch fehlt, hinzu, so fehlt ihr nichts mehr, und sie wird folglich der größern gleich. Auf eine ganz ähnliche Art wird auch die negative Antwort bestimmt. Hier folgen noch ein Paar andre Fragen, in denen 2 unbekannten Zahlen allgemein verdoppelt ꝛc. werden.

Fr. Wieviel mal ist die kleinere von 2 ungleichen Zahlen immer in der doppelten Summe beider enthalten?

Antw. Immer 4 mal, und es bleiben noch 2 Unterschied.

Fr. Wie oft ist die kleinere Zahl in 3 mal der Summe immer enthalten, und was bleibt dann noch? oder anderst ausgedrückt: wieviel kleinere Zahlen sind immer in 3 mal der Summe von 2 unbekannten Zahlen enthalten, und was bleibt noch als ungerader Rest?

Antw. 6 kleinere, und es bleibt noch 3 mal der Unterschied.

Auflösung. In 1 mal der Summe ist 2 mal die kleinere, und 1 mal der Unterschied enthalten, und in 3 mal der Summe ist also 3 mal 2 mal die kleinere und 3 mal der Unterschied enthalten.

Fr. Wie oft ist die große in 9 mal der Summe immer enthalten?

Antw. In 9 mal der Summe ist sie 9 mal enthalten, und es bleibt noch 9 mal die kleinere.

Fr. Wie oft ist der Unterschied in 10 mal der Summe enthalten, und was bleibt dann noch?

Antw. 10 mal der Unterschied, und es bleibt noch 20 mal die kleinere, weil in der Summe 1 mal der Unterschied mehr 2 mal die kleinere enthalten ist rc.

So kann man wieder fragen, wie oft die kleine? die große? und endlich der Unterschied? in 10 mal der Summe mehr der kleinern, oder in 10 der Summe mehr 4 mal der größern rc. enthalten ist. Auch könnte man fragen: wie oft sie in so und soviel mal der Summe, mehr ½, ⅓, ¼, ¾tel mal derselben enthalten ist, und was jedesmal noch nothwendig ungerad Rest bleibt?

Wie man hier mehrmal diese unbekannte Zahl positiv wiederholte, so kann dieses auch negativ geschehn.

Fr. Wie oft erhält man die kleinere Zahl negativ, wenn man von der Summe 2er unbekannter Zahlen, 10 mal die größere wegthut?

Antw. 8 mal, die kleinere negativ, mehr 9 mal die Unterschiede negativ.

Daß diese Aufgaben, weiter ausgedehnt, nicht ganz unwichtig sind, wird man aus dieser einzigen Aufgabe und aus der Ausführung der positiven Größen oder Zahl sehn; ich überlasse die weitere Ausführung einem jeden nach Gutdünken.

§. b.

Von der unorganischen Vergleichung 2er unbekannter Zahlen mit 2 bekannten verbunden.

Eine bekannte Zahl ist nicht mehr hinlänglich, um die 2 unbekannten zu bestimmen, wie aus folgender Aufgabe deutlich wird; deswegen wird der Anfang gleich mit 2 bekannten verbunden gemacht.

Lhr. Sehet, wieviel Zahlen es gebe, wovon eine um 9 mehr ist, als die andre?

Antw. Soviel man will; denn die kleinere kann seyn, was man will, nur muß die größere um 9 mehr seyn.

Das Kind wird so dahin geführt werden, einzusehn, daß noch eine Bedingung mangelt, um bestimmte Zahlen zu finden; deswegen wird hier auch gleich der Anfang mit 2 bekannten Zahlen oder Verhältnissen gemacht.

Eine von 2 Zahlen ist um 1 mehr, als die andre, und beide betragen 11, 12, 13, 14, 15, 16 rc. Was werden dieses in jedem Falle für Zahlen seyn?

Antw. Im ersten Falle ist die eine 5, die andre 6; im 2ten ist die eine $5\frac{1}{2}$, die andre $6\frac{1}{2}$ rc.

Auflösung. Eine von 2 Zahlen ist um 1 mehr, als die andre; thut man das, was sie mehr als die andre

ist, von ihr hinweg, so wird sie gleich der anderen. Wird dieses Eins auch von ihrer Summe, die 11 ist, weggethan, so bleiben noch 2 gleiche Zahlen, und beider bekannten Summe = 10. Eine unbekannte ist nach dem 1 §. die Hälfte von dem Doppelten oder von der Summe; folglich 5, und die andre ist 1 mehr, also 6.

Alle andere Aufgaben dieser Art werden auf gleiche Weise aufgelöset; jeder wird das Weitere selbst auszuführen im Stande seyn.

Lhr. Seht, was für 2 Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, ꝛc. ausmachen, wenn die eine um 4½ weniger ist, als die andre?

Antw. Wenn ihre Summe 20 ist, so beträgt die kleinere 7¾ und die größere 12¼.

Diese Aufgaben können auf 2 wesentlich verschiedene Arten gelöset werden: entweder kann man zu der kleineren 4½ hinzusetzen, wodurch dann diese gleich wird der größeren; oder man kann das, was die größere mehr ist, als die kleinere, von der größeren wegthun; im 1ten Fall muß 4½ hinzugesetzt werden, im 2ten Fall 4½ abgezogen; dadurch erhält man für den 1ten Fall die große Zahl, und für den 2ten die kleinere.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, die eine ist um 1, 2, 3 mehr, als die andre, die größere ist 100? oder die kleinere ist 100? Es fragt sich: wieviel sie in jedem Falle sey? Diese letztern Aufgaben sind unwichtig und leicht.

Mit weniger kann das Gleiche vorgenommen werden.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, die eine ist um 20 mehr, als die andre, und beide sind 10. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen.

Antw. Die eine ist 15, die andre 5 negativ.

Auflösung. Wenn eine von diesen beiden Zahlen um 20 mehr ist, als die andre, so ist diese 2te um 20 weniger; um diese 2te gleich der 1ten zu machen, muß 20 hinzugesetzt werden; folglich muß 20 zu der bekannten Summe = 10 hinzugesetzt werden, welches 30 giebt; dadurch werden beide Zahlen einander gleich; folglich eine Zahl die Hälfte von 30 = 15; nun ist dieses die größere, weil man in der Auflösung die kleinere gleich der größern gemacht hat; die kleinere ist folglich um 20 weniger, oder = 5 negativ.

Probe. Wenn diese Zahlen richtig seyn sollen, so muß die größere um 20 mehr seyn, als die kleinere; 15 ist um 20 mehr, als 5 negativ, und 5 negativ mehr 15 positiv, macht 10, also sind beide Eigenschaften erfüllt, und folglich die Zahlen richtig.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, die eine ist um 20 mehr, als die andre, die kleinere ist 8 negativ. Es fragt sich: wieviel die größere sey?

Bestimmung der 2 unbekannten Zahlen durch den Unterschied.

Hier kann der Unterschied in Gleichheit gesetzt werden mit der kleineren; er kann bestimmt werden, um wieviel er mehr oder weniger, als die kleinere sey; ferner, wieviel er weniger, als die größere sey?

Fr. Man denkt 2 Zahlen, deren Unterschied gleich ist der kleineren, und wovon die Summe 100 beträgt. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen?

Antw. Die eine ist 33 ⅓, und die andre 66 ⅔.

Auflösung. Nach der Angabe ist der Unterschied gleich der kleineren; der Unterschied und die kleinere betragen aber soviel, als die größere; folglich hat die größere 2 Theile, wie die kleinere 1 hat; die größere und kleinere, oder die 2 Theile und 1 Theil machen 100; folglich 1 Theil = 33 ⅓. die kleinere hat einen solchen Theil oder 33 ⅓ und die größere 2 oder 66 ⅔.

Fr. Man denkt 2 Zahlen; der Unterschied ist um 1 mehr, als die kleinere; beide zusammen oder ihre Summe beträgt 200. Es fragt sich: wieviel jede sey?

Antw. Die kleinere Zahl = 66 ⅓, die größere = 133 ⅔.

Auflösung. Der Unterschied ist um 1 mehr, als die kleinere; folglich hat der Unterschied 1 Theil mehr 1, wie die kleinere nur 1 Theil hat; die größere ist = dem Unterschied mehr der kleineren; folglich hat sie 1 Theil mehr 1, mehr noch einen solchen Theil für die kleinere, zusammen 2 Theile mehr 1, wie die kleinere nur 1 hat; die kleinere mehr die größere oder 1 Theil + 2 Theil und 1 sind 200; oder 3 gleiche Theile mehr 1 Einheit oder 1 Ganzes machen 200; folglich macht einer nach dem 2ten §. den 3ten Theil von 199 = 66 ⅓; die kleinere Zahl hat einen solchen Theil = 66 ⅓, die größere hat 2 solcher Theile mehr 1 = 133 ⅔.

Fr. Man denkt 2 Zahlen; der Unterschied ist um 10 weniger, als die größere, oder der Unterschied ist um 10 weniger, als die kleinere rc. Es fragt sich: wieviel diese unbekannten Zahlen in jedem Fall seyn?

Um diese und ähnliche Aufgaben zu lösen, führt man die kleinere und den Unterschied jedesmal auf die größere zurück, und sagt: die kleinere mehr dem Unterschied sey = der größeren. Ist der Unterschied um 10 weniger, als die

kleinere, so fehlen dem Unterschiede 10, bis er gerade so groß, als die kleinere ist; folglich fehlt in diesem Falle der größeren auch 10, bis sie 2 mal so groß wird, als die kleinere; also müßte in diesem Falle zur größeren noch 10 gesetzt werden, bis sie gerade 2 mal so groß wäre, als die kleinere. Ist der Unterschied um 10 weniger, als die größere, so fehlt ihm noch 10, bis er gerade so groß wird, als die größere. Die größere ist aber gleich dem Unterschiede mehr der kleineren.

Diese Aufgaben sind sehr wichtig, und nicht ganz leicht; es ist deswegen gut, wenn mehrere Aufgaben gemacht werden, als hier angegeben sind, welches aber auch jeder Lehrer und Selbstlehrling wissen wird, oder doch wissen soll.

Statt Unterschied und Summe von beiden als bekannt anzugeben, kann der Unterschied und nur eine Zahl als bekannt angegeben werden.

Fr. Der Unterschied zwischen 2 Zahlen ist gleich der kleineren, und die größere ist 100 oder die kleinere ist 100. Es fragt sich: wieviel die kleinere und die größere in jedem Fall sey?

Fr. Der Unterschied zwischen 2 unbekannten Zahlen ist um 10 mehr, als die kleinere, und der Unterschied mehr die größere ist 600. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen?

Fr. Die größere von 2 unbekannten Zahlen ist um 100 mehr, als der Unterschied, der Unterschied mehr die kleinere beträgt 200. Es fragt sich, wieviel diese beiden Zahlen seyen?

Antw. Die kleinere ist 100, und die größere 200.

Auflösung. Die größere von 2 unbekannten Zahlen ist gleich der kleineren mehr dem Unterschied; die kleinere

mehr der Unterschied ist gleich 200; folglich ist die größere auch 200; nun ist die größere um 100 mehr, als der Unterschied; thut man dieses von der größeren weg, so wird der Rest gleich dem Unterschied; 100 von 200 weggethan, bleibt 100, folglich ist der Unterschied 100; der Unterschied mehr die kleinere beträgt 200; also ist die kleinere auch noch 100; folglich die kleinere 100, und die größere 200.

Wie überall auf das Negative hinuntergestiegen wird, so kann dieses auch hier geschehen; die weitere Ausführung geht wieder so gesetzmäßig fort, wie bei den positiven Verhältnissen.

Als Anleitung für den Lehrer oder Selbstlehrling will ich hier einige der wesentlichsten Gesetze nacheinander aufstellen, nach denen die Aufgaben und Reihenfolgen gemacht werden können.

Um 2 unbekannte Zahlen zu bestimmen, werden immer 2 bekannte Zahlen oder 2 bekannte Verhältnisse erfordert. Diese 2 bekannten Verhältnisse können bestehen: 1tens in der Angabe des Unterschieds von der größern zur kleinern, und in der Angabe der Summe von beiden; der Unterschied kann durch das Mehr und Weniger ausgedrückt werden; 2tens kann die kleinere Zahl durch das Mehr und Weniger zum Unterschiede der kleineren und größeren ausgedrückt, und dabei ebenfalls die Summe der beiden unbekannten Zahlen als bekannt angegeben werden. So kann der Unterschied zwischen 2 unbekannten Zahlen auch mit der größern durch das Weniger in Verhältniß gesetzt werden; 3tens kann der Unterschied von der größern zur kleineren, und dabei, statt der Summe beider, die Summe der Einen mehr dem Unterschiede angegeben werden; dieses kann wieder durch das Mehr und Weniger ausgedrückt werden. Auf die gleiche

Art kann das negative und positive Verhältniß vereinigt durchgeführt werden.

Sollte dieses noch nicht hinlänglich deutlich seyn, so könnte man nur diese einzelnen Fragen in diesem Geist durchgehen, indem jede Frage ein karakterisirendes Verhältniß ausdrückt.

Bisher waren die 2 unbekannten Größen nur einfach da; auf gleiche Art können sie verdoppelt, verdreifacht werden, wie aus der allgemeinen Vergleichung 2er unbekannter Größen oder Zahlen zu sehen ist. Hier folgen über diesen Gesichtspunkt einige Aufgaben, die ganz wieder obige Reihenfolge haben.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, die eine ist um 10 mehr, als die andre, und 3 mal die Summe von beiden beträgt 400. Es fragt sich: wieviel diese unbekannten Zahlen seyn?

Antw. Die kleinere ist 61⅔, und die größere 71⅔.

Auflösung. In 1 mal der Summe von 2 unbekannten Größen ist 2 mal die kleinere mehr dem Unterschied; in 3 mal derselben, ist 3 mal 2 mal die kleinere, mehr 3 mal der Unterschied, in allem giebt es 6 mal die kleine mehr 3 mal den Unterschied, und dieses ist nach der Angabe 400. Der Unterschied zwischen der größern und kleinern ist 10; denn man hat angegeben, die größere sei um 10 mehr, als die kleinere; also wird 6 mal die kleinere mehr 3 mal 10 = 30, gleich 400, und wenn dieses ist, so wird die unbekannte kleinere Zahl nach dem 2ten §. 61⅔; und die größere 10 mehr = 71⅔.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon der Unterschied 10 ist; 4½ mal die Summe beider Zahlen = 1000. Es fragt sich: wieviel die Zahlen seyn?

Die Auflösung dieser Aufgabe ist ähnlich der obigen, mit dem Unterschied, daß hier noch ½ mal die Summe genommen werden muß, und in ½ mal der Summe ist ²⁄₂ mal die kleine, oder 1 mal die kleine mehr ½ mal der Unterschied enthalten.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, deren Unterschied 30, und wovon ⁴⁄₅ mal ihre Summe 200 beträgt ꝛc.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon 3 mal die größere, und 2 mal die kleinere 100 beträgt; die größere ist um 1 mehr, als die kleinere. Es fragt sich: wieviel die kleinere und größere Zahl sey?

Anw. 19 ²⁄₅ ist die kleine, und 20 ²⁄₅ die große.

Auflösung. In der größern ist 1 mal die kleinere enthalten, mehr 1; und in 3 mal der größern ist 3 mal die kleinere + 3 mal 1, 2 mal die kleinere ist schon dabei; 3 mal und 2 mal die kleinere macht 5 mal diese kleinere, und 5 mal diese kleinere mehr 3 macht 100; folglich 1 mal die kleinere der 5te Theil von 79, oder 19 ²⁄₅; die größere ist 1 mehr, oder 20 ²⁄₅.

Fr. 5 mal eine Zahl, die um 3 mehr ist, als eine andere, mehr 2 mal diese kleinere, mehr 4 mal der Unterschied, machen mit einander 200. Es fragt sich: wieviel sind die unbekannten Zahlen?

Wie nach diesen Gesetzen die kleinere, die größere und der Unterschied miteinander verbunden werden können, wird aus diesen einzelnen Aufgaben und aus den noch folgenden, indem man auf das Weniger hinunter steigt, deutlich werden.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die eine um 20 mehr ist, als die andre; die Summe von beiden, weniger

die größere, beträgt 100. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyn?

Antw. Die kleinere ist 100, und die größere ist 120.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, deren 3 malige Summe weniger 4 mal die größere, 200, und deren Unterschied 10 ist. Es fragt sich: wieviel diese 2 Zahlen seyn?

Antw. Die kleinere ist 105, die größere 115.

Auflösung. In 3mal der Summe ist 3mal die größere und 3mal die kleinere, oder 6 mal die kleinere und 3 mal der Unterschied enthalten; denn in der größeren ist die kleinere mehr dem Unterschiede; in 4 mal der größeren ist 4 mal die kleinere und 4 mal der Unterschied enthalten; 4 mal die kleinere und 4 mal der Unterschied von 6 mal der kleineren und 3 mal dem Unterschiede abgezogen, bleibt noch 2 mal die kleinere, mehr 1 mal der Unterschied negativ; folglich machen 2 mal die kleinere mehr 1 mal der Unterschied negativ 200. Der Unterschied negativ ist 10 weniger, als nichts; folglich ist 2 mal die kleinere Zahl und 10 mehr, oder 210 und 1 mal dieselbe, die Hälfte von 210 oder 105, nach dem 2ten §., die größere 115.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, deren 4 malige Summe mehr 3 mal die kleinere weniger 5 mal die größere 100 beträgt; der Unterschied dieser beiden Zahlen ist 10. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen?

Eben so, wie man im 2ten Verhältniß den Unterschied als bekannt angeben kann, könnte man auch die kleinere oder größere als bekannt angeben.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, 3 mal die Summe von beiden, weniger 4 mal die größere, ist 10 negativ. Es fragt sich: wieviel jede sey?

Antw. 1 und 13.

Auflösung. In 3 mal der Summe dieser beiden unbekannten Zahlen ist 3 mal die größere und 3 mal die kleinere; thut man von 3 mal der größern und 3 mal der kleineren 4 mal die größere weg, so bleibt 10 negativ, und dafür bleibt in den unbekannten Zahlen 1 mal die größere negativ und 3 mal die kleinere positiv; folglich hebt 1 mal die größere 3 mal die kleinere und 10 auf. Denn wenn nichts mehr bleiben würde, so hätte sie das 3fache der kleineren unbekannten Zahl gerade aufgehoben; nun hat sie nicht nur dieses, sondern noch 10 aufgehoben; folglich die größere Zahl = 3 kleinen und 10. Die kleinere ist nach der Angabe unbestimmt; folglich kann man für sie annehmen, was man will. Sie soll hier 1 seyn, so ist die größere 3 mal 1 = 3 mehr; denn 10, also 13.

Daß hier diese Zahlen unbestimmt sind, ergiebt sich schon aus der Angabe, indem nur ein bekanntes Verhältniß angegeben ist. Um diese Zahlen bestimmt zu machen, würde noch ein 2tes bekanntes Verhältniß erfordert, das entweder durch den Unterschied oder durch die größere oder kleinere angegeben werden könnte.

Diese Ansicht weiter auszudehnen, würde als Kopfrechnen zu verwickelt und schwer werden, auch ist es nicht einmal nöthig. Ich höre deswegen damit auf, und will nur noch einfach zeigen, wie man nach den nämlichen Grundsätzen und Gesetzen 3 und mehrere unbekannte Zahlen bei einfachen Angaben behandeln kann, und wie es daher bei 3 und mehreren unbekannten Zahlen Aufgaben gebe, die leichter sind, als die verwickelten vor 2 unbekannten Zahlen. Es ist dieses ganz einleuchtend, indem durch die Verbindung einer Ansicht mit ihr selber ein verwickeltes Verhältniß sich ergiebt.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, der Unterschied von der 1ten zur 2ten ist gleich der 1ten, und der 2ten zur 3ten gleich der 2ten, die 3te oder größte Zahl ist 100. Wieviel ist jede Zahl?

Antw. Die 1te 25, die 2te 50, die 3te 100.

Auflösung. Der Unterschied der 1ten zur 2ten ist gleich der 1ten, und dieser Unterschied mehr die 1te ist auch = der 2ten; folglich ist die 2te 2 mal so groß, als die 1te; aus dem gleichen Grund wird die 3te 2 mal so groß, als die 2te, und die 2te ist 2 mal groß, als die 1te; folglich wird die 3te 4 mal so groß, als die 1te; also wird der 4te Theil der 3te, oder 25 gleich der 1ten, und $\frac{2}{4}$ oder 50 = der 2ten.

Wie hier die 3te als bekannt angegeben wurde, so kann die 1te oder 2te, oder der Unterschied, oder die Summe von allen 3, oder die Summe von 2 rc. angegeben werden, welches ein jeder im Stande seyn wird zu machen. Diese Aufgaben werden nicht unwichtig und zugleich leicht.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 2te um 10 mehr ist, als die 1te, und die 3te ist um 10 mehr, als die 2te. Alle 3 betragen mit einander 300. Es fragt sich: wieviel jede von diesen 3 Zahlen sey?

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 2te um 10 mehr ist, als die 1te, und die 2te um 20 weniger, als die 3te. Es fragt sich: wieviel jede Zahl sey?

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 1te negativ ist, die 2te ist um 100 mehr, als die 1te, und die 3te 200 mehr, als die 2te. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen?

Daß die Zahlen hier unbestimmt sind, ist einfach zu zeigen, indem ein bekanntes Verhältniß fehlt. Die weitere

Ausführung dieser und auch 4 unbekannter Zahlen geht so weiter fort.

Das Zerlegen oder Theilen einer bekannten Zahl in 2, 3 rc. unbekannte Theile ist mit dem Bestimmen 2, 3 unbekannter Zahlen, deren Summe als bekannt angegeben ist, einerlei, nur der Ausdruck ist verschieden; deswegen werden einige Aufgaben auf diese Art ausgedrückt folgen.

§. 5.

Vom Theilen einer bekannten Zahl in 2, 3 rc. unbekannte Theile.

Fr. Man soll 100 so in 2 Theile theilen, daß einer um 20 weniger wird, als die andere. Es fragt sich: wieviel ein jeder Theil werde?

Antw. Einer ist 40, und der andre ist 60.

Auflösung. Wenn ein Theil um 20 weniger ist, als der andre, so ist dieser 2te Theil um 20 mehr; will man den 1ten Theil gleich dem 2ten machen, so muß man zum 1ten noch 20 hinzusetzen, folglich auch zur bekannten oder 100, welches 120 giebt; 1 Theil ist die Hälfte von 2 Theilen, folglich auch die Hälfte von 120 = 60; nun ist dieser der größere Theil; folglich der andere um 20 kleiner, also 40.

Auch kann sie so gelöset werden, daß man die kleinere zuerst findet, wodurch dann das, was die größere mehr ist, als die kleinere, von der Summe weggethan werden muß.

Fr. Man soll 100 so in 2 Theile theilen, daß der Unterschied des 1ten Theils zum 2ten gleich wird dem 1ten Theil, oder daß der Unterschied dieser 2 Theile um 1 weni-

ger wird, als der größere, oder um 1 weniger, als der kleinere; oder um 1 mehr, als der kleinere; mehr als der größere kann er nicht werden.

Fr. Man soll 100 so in 3 Theile theilen, daß der 2te um 10 mehr wird, als der 1te, und der 2te um 10 mehr, als der 3te ꝛc.; oder man soll 100 so in 3 Theile theilen, daß der 2te um 10 mehr wird, als der 1te, und der 3te um 15 mehr, als der 2te, oder auch als der 1te ꝛc.; oder man soll 100 so in 3 Theile theilen, daß der 2te um 10 mehr wird, als der 1te, und der 3te um 40 weniger, als der 2te ꝛc.

Bei dem Wenigen kann auf das Negative hinunter gestiegen werden. Hier wird man mir aber einwenden, dieses sey unnatürlich eine Zahl oder Größe in positive und negative Theile zu theilen, die Theile müssen immer gleichartig dem Ganzen seyn ꝛc. Ich bemerke hier nur das, daß jede selbstständige Ansicht in negatives und positives Verhältniß könne gesezt werden, welches hier beim Theilen folglich auch geschehen kann.

Fr. Man soll 100 so in 2 Theile theilen, daß der eine um 300 weniger wird, als der andere. Es fragt sich: wieviel jeder Theil sey?

Antw. Einer ist 100, und der andere 200 negativ.

Auflösung. Der eine Theil ist um 300 weniger, als der andere; um diesen 2ten Theil dem 1ten gleich zu machen, müssen noch 300 hinzugesetzt werden; folglich auch 300 zu der bekannten Zahl, die so in 2 Theile getheilt werden muß; 300 zu 100 gesetzt, giebt 400, und 400 in 2 gleiche Theile getheilt, giebt auf einen Theil 200, also ist die größere 200. Die kleine wäre auch 200, aber weniger 300, welches 100 negativ macht.

Probe. Wenn dieses richtig seyn soll, so müssen die beiden Theile gleich seyn 100; 200 und 100 negativ machen

100; der 2te Theil ist auch um 300 weniger, als der 1te; folglich sind alle Bedingungen erfüllt, und 100 ist richtig getheilt werden.

Auf diese Weise geht man zu 3 und mehreren unbekannten negativen und positiven Theilen über. Hier sind die Verhältnisse bei den Theilen nur einfach angegeben worden. Daß diese wieder eben so, wie in dem vorhergehenden §., verbunden werden können, wird man ohne die Ausführung einsehen und dasselbe auch zu machen im Stande seyn, wenn man es bedarf.

§. 6.

Auf 2 unbekannte Zahlen angewandt.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, die eine ist die Hälfte, der Drittel von der anderen. Es fragt sich: was man von diesen beiden Zahlen allgemein Wahres sagen könne?

Antw. Daß im 1ten Fall die größere 2 mal so groß ist, als die kleinere, und 2 mal so groß, als der Unterschied; ferner, daß der Unterschied ebenfalls die Hälfte von der größeren sey. Auf die gleiche Art kann der 2te Fall durchgeführt werden. Die Auflösung und die weitere Ausdehnung ist so leicht, daß es ganz unnöthig wäre, etwas mehr darüber zu sagen.

Wie in der unorganischen Vergleichung die 2 unbekannten Zahlen mehrere mal wiederhohlt worden sind, so kann dieses auch hier geschehen. Z. B.

Fr. Seht, was man von 2 mal der Summe 2er unbekannter Zahlen, wovon die eine ⅔ der andern ist, allgemein Wahres sagen kann?

Antw. Daß die größere 1½ mal so groß, als die kleinere, 3 mal so groß, als der Unterschied von der kleineren zur größern ist; ferner ist die kleinere $^2/_{10}$ von 2 mal der Summe dieser beiden Zahlen, die größere ist $^3/_{10}$, und der Unterschied $^1/_{10}$ davon.

Auflösung eines Falls.

Die kleinere von diesen 2 Zahlen hat 2 Theile, wie die größere 3 hat; folglich beträgt ihre Summe 5 Theile, 2 mal dieselbe, 2 mal 5 oder 10. Die kleinere hat 2 solcher Theile; folglich ist sie $^2/_{10}$ der doppelten Summe. Wie hier 2 mal die Summe wiederhohlt worden ist, so kann auch 2 und mehrere mal die einzelne Zahl und der Unterschied wiederhohlt werden, welches leicht nach der Anleitung des vorhergehenden §. ausgeführt werden kann.

§. a.

Dieser §. mit einer bekannten Zahl oder Verhältniß verbunden.

Um hier eine solche Aufgabe zu bestimmen, wird nur eine bekannte Zahl nöthig werden; indem das organische Verhältniß das andere hinlänglich bestimmt.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die eine $^4/_5$ der anderen ist, und deren Summe 180 beträgt, oder deren kleinere 180, oder deren größere 180, oder deren Unterschied 180 ist. Es fragt sich: wieviel diese 2 unbekannten Zahlen in allen Fällen seyen?

Antw. Im 1ten ist die kleinere 80, die größere 100.

Auflösung. Die kleinere von diesen 2 unbekannten Zahlen ist $^4/_5$ von der größeren; folglich hat die kleinere

von diesen 2 Zahlen 4 Theile, wie die größere 5 hat; beide zusammen haben also 9 Theile, und diese betragen nach der Angabe 180; folglich ist 1 Theil = dem 9ten Theil von 180 = 20. Die 1te oder kleinere hat 4 solcher Theile, also auch 4 mal 20 = 80 rc.

Beträgt hingegen die kleinere 180, so machen die 4 gleichen Theile 180; folglich 1 Theil der 4te Theil von 180 = 45; die größere hat 5 solcher Theile, oder 5 × 45 rc.

Alle diese Aufgaben können auch wieder theilend ausgedrückt werden, welches in diesem §. gleich ohne weitere Anmerkung geschehen wird.

Dieses auf eine andere Art ausgedrückt.

Fr. Man soll 180 so in 2 Theile theilen, daß einer 4/5 des anderen, oder wovon der Unterschied gleich wird 1/4 des kleineren Theils rc.

Auflösung. Der Unterschied des kleineren Theils zum größeren ist 1/4 des kleineren, und der Unterschied von einem kleinern zu einem größern zusammen machen immer den größern Theil; folglich hat nach dieser Angabe der größere wieder 5 Theile, wie der kleinere 4 hat, zusammen 9 Theile; folglich muß 180 in 9 gleiche Theile getheilt werden, wovon 5 Theile zum größeren kommen rc.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die größere 2½ mal so groß ist, als die kleinere, und deren Unterschied 100 beträgt. Es fragt sich: wieviel diese unbekannten Zahlen seyn?

Antw. 66⅔ rc.

Auflösung. Die größere ist 2½ mal so groß, als die kleinere; folglich hat die größere 2½ Theil, wie die kleinere nur 1 hat, oder die größere hat 5/2, wie die kleinere

nur $\frac{2}{5}$ hat, oder die größere hat 5, wie die kleinere 2 hat; der Unterschied zwischen 2 und 5 Theilen macht 3 solcher Theile; folglich machen nach der Angabe die 3 Theile 100, und 1 Theil also auch den 3ten Theil von 100 = 33⅓; die kleinere hat 2 solcher Theile, also 2 mal 33⅓ = 66⅔; die größere hat 5; folglich 5 mal 33⅓ = 166⅔ ꝛc.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die eine ⅞ der anderen ist, und deren 4½ malige Summe 200 beträgt ꝛc.

Oder man denkt 2 solcher Zahlen, wovon 4 mal der Unterschied und 3 mal die kleinere 200 macht. Oder wovon 4 mal die größere und 3 mal der Unterschied 200 macht. Es fragt sich: wieviel diese unbekannten Zahlen in jedem Fall seyen?

Die Auflösungen gehen ganz wie oben.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon der Unterschied $\frac{1}{11}$ der Summe von beiden beträgt; die größere Zahl ist 100. Es fragt sich: wieviel die kleinere sey?

Antw. 83⅓.

Auflösung. In der Summe von 2 verschiedenen Zahlen liegt 2 mal die kleinere mehr dem Unterschiede; thue ich den Unterschied von der Summe weg, so bleibt noch 2 mal die kleinere; $\frac{1}{11}$tel von der Summe weggethan, bleibt noch $\frac{10}{11}$ derselben; folglich machen die $\frac{10}{11}$, 2 mal die kleinere; dann ist also $\frac{5}{11}$ gleich 1 mal der kleineren, und also bleibt für die größere noch $\frac{6}{11}$tel der Summe; folglich hat die kleinere 5 Theile, wie die größere 6; diese 6 machen 100; folglich 1 Theil den 6ten Theil von 100 gleich 16⅔, und 5 solcher Theile machen 83⅓.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon der Unterschied $\frac{2}{13}$ von der Summe ist; $4\frac{1}{2}$ mal die Summe beträgt 234. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen?

Antw. 22 und 30.

Auflösung. In der Summe ist 2 mal die kleinere, und 1 mal der Unterschied enthalten; der Unterschied von der Summe weggethan, bleibt noch 2 mal die kleinere; die Summe hat hier 13 Theile, wie der Unterschied 2; 2 von 13 weggethan, bleibt mir noch 11 Theile; folglich kommt auf eine von den kleinen Zahlen $5\frac{1}{2}$ Theil, und auf die große 2 mehr oder $7\frac{1}{2}$; die Summe von beiden beträgt 13; und $4\frac{1}{2}$ mal die Summe $4\frac{1}{2}$ mal $13 = 58\frac{1}{2}$ Theil; die kleine hat $5\frac{1}{2}$ solcher Theile oder $\frac{11}{117}$ Theil; oder $\frac{11}{117}$ der Summe $234 = 22$.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon der Unterschied $\frac{3}{22}$ von 2 mal der Summe ist, der Unterschied davon beträgt 30. Es fragt sich: wieviel diese beiden Zahlen seyen?

Antw. Die größere 70, die kleinere 40.

Auflösung. Was in der Summe von 2 Zahlen enthalten ist, soll man wissen; der Unterschied ist $\frac{3}{22}$ von 2 mal der Summe; folglich hat 2 mal die Summe 22 Theile, wie der Unterschied 3 hat; die einfache Summe hat also 11 solcher Theile, wie der Unterschied deren 3 hat rc.

Die weitere Auflösung geht wie oben fort.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, deren Unterschied $\frac{3}{14}$ von der Hälfte der Summe ist; die größere Zahl ist 93. Es fragt sich: wieviel die andere Zahl seye?

Antw. 75.

Auflösung. Wenn der Unterschied $\frac{3}{14}$ von der Hälfte der Summe ist, so hat die Hälfte der Summe

14 Theil, wie der Unterschied 3 hat; die ganze Summe hat 2 mal 14 oder 28 solcher Theile; nun hat der Unterschied 3 Theile, wie die Summe 28.

Die weitere Auflösung wie oben.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, deren Unterschied $\frac{4}{15}$ von der Summe beider, mehr der größern ist. So kann man auch die kleinere, oder den Unterschied, oder mehrmal die größere, mehrmal die kleinere, und so auch mehrmal den Unterschied ꝛc. angeben, welches eigentlich nichts neues darbietet, doch als Entwicklung der Kraft im Menschen nicht unwichtig ist.

Hier folgen noch ein paar Fragen über die Verbindung mit dem Weniger.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon der Unterschied $\frac{1}{10}$ von 3 mal der Summe beider, weniger der größern ist; 4 mal die kleinere weniger die größere, beträgt 95. Es fragt sich: wieviel eine jede dieser Zahlen sey?

Antw. 40 und 65.

Auflösung. In 3 mal der Summe beider weniger der größern ist 5 mal die kleinere und 2 mal der Unterschied enthalten; folglich haben die 5 kleinere Zahlen und 2 mal der Unterschied 10 Theile, wie der Unterschied 1 Theil hat. In diesen 10 Theilen sind aber 2 Theile Unterschied, also bleibt für 5 mal die kleinere nur noch 8 Theile; 1 mal der kleinere hat also $1\frac{3}{5}$ solcher Theile, die größere hat deren 1 Theil mehr, oder $2\frac{3}{5}$; 4 mal die kleinere haben also 4 mal $1\frac{3}{5}$ Theil = $6\frac{2}{5}$, weniger aber die größere, bleiben noch 3 und $\frac{4}{5}$ oder $\frac{19}{5}$ Theile, wie die kleinere $\frac{8}{5}$ Theile hat, oder die 95 machen 19 Theile, wie die kleinere 8, und die größere 13 hat; der 19te Theil von

95 = 5, und 8 solcher Theile = 40; die größere hat 13 solcher Theile oder 65.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon der Unterschied $\frac{2}{21}$ von $2\frac{1}{2}$ der Summe weniger 1 mal der größern, und 2 mal der kleinern ist. Auf dieses hin kann wieder der Unterschied, oder die größere, oder die kleinere, oder die Summe von beiden, oder mehrmal dieselben angegeben werden; auch kann man bei dieser Art Aufgaben auf das Negative hinuntersteigen.

Bevor ich weiter gehe, will ich auf die nämliche Art noch 3 unbekannte Zahlen behandlen, oder 1 bekannte in 3 unbekannte Theile theilen. Die Auflösungen davon werden ganz gleich den obigen seyn, deswegen wird auch keine gemacht werden.

Fr. Wieviel ist eine jede dieser unkannten Zahlen, wovon die 1te die Hälfte der 2ten, die 2te die Hälfte der 3ten, und deren ganze Summe 700 ist? oder anders ausgedrückt: Wieviel wird ein jeder Theil von 3 Theilen werden, wenn man 700 so in 3 Theile theilt, daß der 1te die Hälfte des 2ten, der 2te die Hälfte des 3ten wird?

Fr. Man soll 400 so in 3 Theile theilen, daß der 1te $2\frac{1}{2}$ mal so groß wird, als der 2te, und der 3te 3 mal so groß, als die beide ersten zusammen.

Fr. Wieviel sind die 3 Zahlen, wovon die 2te 3 mal soviel ist, als die 1te, und der Unterschied der 2ten zur 3ten $\frac{4}{3}$ der 2ten beträgt?

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon der Unterschied der 1ten zur 2ten 3 mal so groß ist, als die 1te, und der der 2ten zur 3ten $4\frac{1}{2}$ so groß, als die 2te; die Summe von allen 3 Zahlen beträgt 100. Eben so könnte man nur die

Summe der 1ten 2 Zahlen, oder die der 2ten 2 ꝛc. angeben, oder auch den Unterschied; auch kann die Summe von allen 3, von 2 ꝛc. mehrmal wiederhohlt angegeben werden; desgleichen der Unterschied; welches alles aus dem vorhergehenden schon hinlänglich deutlich seyn soll.

Wie das Negative in 2 unbekannten Zahlen vorgekommen ist, so kann es auch in 3 vorkommen; doch zuweilen müssen diese Verhältnisse nicht ausgeführt werden, besonders wenn die Schüler im Vorhergehenden nicht sehr stark sind.

Ein Lehrer, der den Geist des §. aufgefaßt hat, soll fähig seyn, dieses nach Bedürfniß auszudehnen, sogar auf 4 und 5 unbekannte Zahlen, und zwar Negative und Positive.

2 unbekannte Zahlen noch auf eine andere Art mit 2 und mehrern bekannten verbunden.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te 2 mal so groß ist, als die 2te, setzt man zur 1ten 100, und zur 2ten 200, so sind sie einander gleich; oder die 1te wird ½ mal so groß, als die 2te ꝛc. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen zu jedem Fall seyen?

Auflösung. Für den 1ten Fall:

Die 1te Zahl hat nach der Angabe 2 Theile, wie die 2te 1 hat; setzt man zur 1ten 100, und zur 2ten 200, so werden sie einander gleich; zur 2ten setzt man also 100 mehr, als zur 1ten; folglich macht 100 einen solchen Theil aus, wie die 1te 2, und die 2te 1 hat; also ist die 1te 200, die 2te 100.

Für den 2ten Fall:

Die 1te Zahl ist 2 mal so groß, als die 2te; durch das Hinzusetzen von 100 zur 1ten und 200 zur 2ten soll die

1te ½ so groß werden, als die 2te; 100 ist nun ½ so groß, als 200; folglich müßte die 1te schon die Hälfte der 2ten seyn, welches nun nicht ist; folglich kann dieses Verhältniß ewig nicht Statt finden; wäre die 1te schon die Hälfte der 2ten, so würde sie dieses durch dies Hinzusetzen auf jeder Stufe werden, und es wäre daher ein unbestimmtes Verhältniß.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te 8 mal so groß ist, als die 2te; setzt man zur 1ten 100, zur 2ten 600, so wird die 2te 2 mal so groß, als die 1te. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen?

Auflösung. Um diese und ähnliche Aufgaben zu lösen, macht man, daß das Hinzuzusetzende das begehrte Verhältniß bekommt. In dieser Aufgabe muß die 2te 2 mal so groß seyn, als die 1te; deswegen setze ich auch 200 zu ihr, während ich 100 zur 1ten setze; nun setzt man aber zur 2ten nicht nur 200, sondern 600, also 400 mehr, und durch dieses muß die 2te unbekannte Zahl auch 2 mal so groß werden, als die 1te, die 1te ist 3 mal so groß, als die 2te; um eine Größe zu bekommen, die das Doppelte der 1ten hat, muß man 6 mal die 2te Größe oder Zahl erhalten, nun hat man aber bei der 2ten unbekannten Zahl dieselbe schon 1 mal; folglich muß man sie noch 5 mal haben, und dafür wird in der bekannten Zahl 400 mehr hinzugesetzt; folglich machen die 5 Theile, oder 5 mal die 2te unbekannte Zahl 400, und 1 mal dieselbe den 5ten Theil von 400 = 80; die 1te Zahl hat 3 solcher Theile, oder 240, und die zweite 80.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te ⅔ der 2ten ist; setzt man zur 1ten 100, und zur 2ten 50, so wird die 2te ¼ der 1ten. Es fragt sich: welches diese Zahlen seyen?

Fr. Wieviel betragen die 2 Zahlen, wovon die 1te 4 mal so groß ist, als die 2te und deren 1te, wenn man von ihr 500, so wie von der 2ten 100 wegthut, die Hälfte der 2ten wird?

Auch hier macht man wieder, daß das Wegzuthuende der 1ten und 2ten in dem zu suchenden Verhältniß sey?

Das Wegthun und Hinzusetzen mit einander vereinigt.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te 2 mal so groß ist, als die 2te; thut man von der 1ten 100 weg, und zur 2ten hinzu; so wird die 1te $\frac{1}{3}$ der 2ten. Es fragt sich: welches diese Zahlen seyen?

Auflösung. Die 1te Zahl ist 2 mal so groß, als die 2te; folglich hat sie 2 Theile, wie die 2te nur 1 hat, zusammen 3 gleiche Theile; dadurch, daß man von der 1ten 100 weg, und zur 2ten hinzuthut, wird die Summe dieser beiden Zahlen nicht geändert; in diesem 2ten Fall erhält aber die Summe von beiden 4 gleiche Theile, die 1te hat 1, wie die 2te 3; folglich ist die 1te in diesem Fall $\frac{1}{4}$, im 1ten Fall war sie $\frac{2}{3}$. Die 3tel und 4tel findet man in den 12teln; $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, also hat sich die 1te durch das Wegthun von 100 um $\frac{5}{12}$ verkleinert; $\frac{1}{12}$ ist also der 5te Theil von 100, = 20. Die 1te Zahl hat 8 solcher Theile; folglich 160, und die 2te 4 oder 80.

Fr. Wieviel machen die 2 Zahlen, von denen die 1te 4 mal so groß ist, als die 2te, und deren 2te, wenn man von ihr 100 weg- und zur 1ten hinzuthut, $\frac{1}{10}$ der 1ten wird?

Um diese Aufgaben wieder zu lösen, zählt man die Theile der beiden Zahlen zusammen, und macht, nachdem

die 100 von der einen weg- und zur andern hinzugesetzt worden sind, das Gleiche mit den neu entstandenen Theilen. vergleicht auf obige Art die 2ten Theile mit den 1ten.

Daß es auch hierüber noch mehrere verschiedene Auflösungen gebe, bedarf nicht mehr erwähnt zu werden, wenn man diese Auflösung ganz gefaßt hat.

Aufgaben, bei denen mehr hinzugesetzt als abgezogen wird. Z. E.

Fr. Eine Zahl ist doppelt so groß, als eine 2te; thut man von der 1ten 100 weg, und zur 2ten 200 hinzu, so werden beide gleich. Es fragt sich: was dies für Zahlen seyen?

Auflösung. Thut man von der 1ten 100 weg, und zur 2ten 200 hinzu, so setzt man zu diesen beiden unbekannten Zahlen 100 mehr hinzu, als sie wirklich haben, diese 100 werden in die Verhältnisse der 1ten und 2ten unbekannten Zahl eingetheilt; die 1te ist 2 mal so groß als die 2te; deswegen setze ich auch 2 Theile zur 1ten, wie 1 zur 2ten, oder 3 gleiche Theile, welche 100 ausmachen; 1 Theil = 33⅓. Zur 1ten müssen 2 solcher oder 66⅔ gesetzt werden, und zur 2ten 33⅓. Um von der 1ten unbekannten Zahl 100 wegzuthun, muß man die 66⅔ die dabei sind, und noch die 100 oder 166⅔ wegthun; im 1ten Fall ist die 1te Zahl ⅔ der Summe beider, im 2ten hingegen ½ nach den vorhergehenden Auflösungen. ⅔ = 4/6. ½ = 3/6; folglich ist das unbekannte Verhältniß nur um ⅙ der Summe beider unbekannter Zahlen verringert worden, und dafür ist in der bekannten Zahl 166⅔ weggethan worden. Die 1te Zahl hat 4/6 oder 4 mal 166⅔ = 666⅔, weniger aber die 66⅔, die zu ihr hinzugesetzt

worden sind, also 600. Die 2te Zahl ist nur ½ mal so groß, also 300.

Auf eben diese Weise wird das Weniger behandelt. Um ähnliche Aufgaben zu lösen, wird das Mehr und Weniger in das Verhältniß der beiden unbekannten Zahlen getheilt.

Eine sehr weite Ausführung dieser Ansicht würde wohl sehr schwer werden; ist aber auch nicht mehr nöthig.

Wie man eine von 2 Zahlen mit ihrer unbekannten Summe organisch verglichen hat, so kann man dieses auch mit ihrer Summe, mehr einer bekannten Zahl thun, wodurch wieder 2 bekannte gegeben werden.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die kleinere ¼ der Summe beider mehr 100 ist, die größere beträgt 350. Es fragt sich: wieviel die kleinere Zahl sey?

Auflösung. In der Summe zweier Zahlen ist 1 mal die kleinere und 1 mal die größere, und in 1 mal der Summe mehr 100 ist 1 mal die kleinere, 1 mal die größere und 100 enthalten; die größere ist 350, dieses mehr 100 = 450, also hat die Summe von der größern Zahl und 100, 450, und die kleinere ist ¼ von der kleinern und 450; thut man die kleinere von der Summe weg, so bleiben in der unbekannten Summe noch 3 gleiche Theile, und in der bekannten Zahl noch 450, folglich ist 1 Theil oder die 1te unbekannte Zahl der 3te Theil von 450 = 150.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die kleinere ⅕ der Summe beider mehr 100 ist. Der Unterschied macht 600. Es fragt sich, wieviel diese beiden Zahlen seyen?

Antw. 233 ⅓.

Auflösung. Bei der angegebenen Summe ist noch 100, in derselben Summe ist ferner 2 mal die kleine und 1 mal der Unterschied; der Unterschied ist 600, folglich hat 600 + 100 und 2 kleine 5 Theile, wie die kleine 1 hat; thut man von 700 + 2 kleinen die 2 kleinen weg, so hat man 2 Theile weggethan, wie die Summe mehr 100 deren 5 hat; 2 von 5 weggethan, bleiben noch 3 gleiche Theile, wie die kleine 1 hat; 1 solcher Theil ist der 3te Theil von 3, folglich auch von der Summe 700 = 233 ⅓.

Fr. Wieviel betragen die beiden Zahlen, wovon die größere 4/7 der Summe beider + 100 ist, und die kleinere 80 beträgt?

Antw. Die größere = 240.

Um dieses wieder zu lösen, kann man ganz auf obige Art verfahren; statt der kleinern wird die große weggethan.

Auch kann die eine von den beiden Zahlen zur doppelten und dreyfachen Summe mehr einer bekannten ausgedrückt werden, wie bei §. a. dieses zu sehen ist.

Hier folgt über diesen Gesichtspunkt eine Aufgabe.

Fr. Wieviel betragen die 2 Zahlen, wovon die kleinere 2/11 von der doppelten Summe mehr 100 ist, wenn der Unterschied zwischen diesen Zahlen 200 macht?

Bei der gar zu verwickelten Verbindung würde es über die Kräfte der Kinder gehen, weswegen hier abgebrochen werden kann. — Noch folgen zum Beschluß ein Paar Aufgaben über das Weniger, welches, wie überall, auch hier in das Negative hinuntersteigen kann.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die kleinere ⅙ der Summe ist, wenn man 100 von der Summe wegthut; der

Unterschied der größern zur kleinern beträgt 400. Es fragt sich: wieviel diese beiden Zahlen seyn?

Auflösung. Von der Summe dieser Zahlen muß man noch 100 wegthun, bis sie 6 Theile bekommt, wie die erste einen hat, folglich hat die Summe 6 Theile und 100, wie die kleinere nur einen hat, in der Summe hat er 2 kleine und einen Unterschied; thut man die 2 kleinen von der Summe weg, so bleibt noch der Unterschied; und in den Theilen bleiben noch 4 Theile, wie die kleine einen hat, und dafür bleibt der Unterschied und 100, welche gleich sind den 4 Theilen. Der Unterschied ist wie bekannt 400, folglich machen 400 die 4 gleichen Theile mehr 100, und 1 Theil wird der 4te Theil von 400 — 100 oder 75. Die größere ist 400 mehr, folglich 475.

Probe. Die kleinere muß $\frac{1}{6}$ der Summe beider seyn, wenn man 100 von ihr wegthut; $475 + 75 = 550$ weniger $100 = 450$. Wenn die kleinere richtig seyn soll, so muß sie $\frac{1}{6}$ von 450 seyn, oder 75 muß 1 Theil seyn, wie 450 6 Theile hat, der 6te Theil ist auch 75.

Was diese Ansicht für eine unendliche Ausdehnung hat, wird man besonders aus dieser einzigen Aufgabe sehen; wenn aber die Schlußkraft gehörig entfaltet ist, so soll sie fähig seyn, alle Aufgaben dieser Ansicht, und wenn sie auch niemals vorkommen, ohne weiters zu lösen. Freilich können so verwickelte Verhältnisse gegeben werden, daß es nicht möglich ist, dieselben im Kopf zu behalten; als Festhaltungsmittel dafür können und dürfen die Ziffern ohne Nachtheil gebraucht werden; sie sollen bei solchen Aufgaben gebraucht werden, indem bei dem zu vielen Behalten der Zahlen und Verhältnisse der Vernunftschluß zu sehr mit unwichtigen Sachen gehindert wird, und gar leicht zu Nebenbegriffen Anlaß giebt,

indem die Masse dieses als eine gute Uebung des Kopfrechnens ansieht, die viele Vortheile im täglichen Rechnen darbietet.

Hier könnte man, wenn man es nöthig finden sollte, Verbindungen der verschiedenartigen §§. mit einander machen, welches leicht von jedem Lehrer, der den Geist aufgefaßt hat, gemacht werden kann; sehr wichtig ist es aber nicht mehr.

Zwei unbekannte Zahlen durch den §. 2. in Gleichheit gesetzt.

Fr. Es fragt sich, wieviel die beiden unbekannten Zahlen seyen, die zusammen 100 betragen, und von denen 2 mal die erste und 1 mal die 2te 130 machen?

Auflösung. Bei der ersten Gleichung werde angegeben, daß die 1te und 2te mit einander 100 betragen, in der 2ten hat man 2 mal die 1te und 1 mal die 2te, folglich 1 mal die erste mehr als in der ersten Gleichung, und dafür hat man in der unbekannten Zahl 30 mehr, folglich macht 1 mal die 1te Zahl 30, die 1te und 2te betragen zusammen 100, folglich ist die 2te noch 70.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, welche zusammen gleich sind 100, und von denen die 1te 2 mal und die 2te 1 mal 140 machen, oder 3 mal die 1te und 1 mal die 2te = 140 oder 4 mal die 1te + 1 mal die 2te = 140 rc. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen in diesen Fällen seyn?

Fr. Man denkt 2 Zahlen, die 1te und 2te machen 200. ½, ⅔ oder ¾ mal die 1te und 1 mal die 2te betragen 120. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyn?

Auflösung. Die 1te und 2te machen 200, ½ mal die 1te mehr 1 mal die 2te betragen 120; in der 2ten Gleichung ist ½ mal die 1te weniger als in der 1ten Gleichung, und dafür ist in der bekannten 80 weniger, folglich beträgt die Hälfte 80, und die ganze 1te 160. Im 2ten Falle ist in der unbekannten 2ten Gleichung ⅔ der 1ten weniger, und in der bekannten 80, also sind diese 80 ⅔ der ersten Zahl, die Zahl ist also 3 mal der halbe Theil von 80 = 120. Im 3ten Falle ist in der unbekannten Gleichung ¾ der 1ten weggethan, in der bekannten 80, also machen die 80 die ¾ mal die kleine Zahl rc.

Welches sind die Zahlen, die zusammen 100, und von denen 2 mal die 1te und 2 mal die 2te 200 machen?

Die Zahlen sind unbestimmt; die eine kann so klein seyn, als man will, die andre wird dann das Fehlende bis auf 100.

Auflösung. In der ersten Gleichung hat man 1 mal die 1te und 1 mal die 2te unbekannte Zahl, in der 2ten hingegen hat man das Doppelte der ersten und das Doppelte der 2ten, folglich kann man auch ohne Angabe das Doppelte in den bekannten schon wissen, und also ist es, als ob die 2te nicht da wäre; folglich hat man zu 2 unbekannten Zahlen nur eine Bestimmung gegeben, wodurch sie auch unbekannt bleiben.

Fr. Man denkt 2 Zahlen; die 1te und 2te machen 100, 2 mal die 1te und 3 mal die 2te machen 280. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen?

Antw. Die erste 20, die andre 80.

Auflösung. In der ersten Gleichung hat man, daß 1 mal die 1te und 1 mal die 2te 100 betragen; in der 2ten, daß 2 mal die 1te und 3 mal die 2te 280 machen. Um die

erste unbekannte Zahl der ersten Gleichung gleich der ersten unbekannten Zahl der 2ten Gleichung zu machen, muß ich die erste unbekannte Zahl doppelt nehmen; um wieder Gleiches zu erhalten, muß man alles doppelt nehmen, dadurch bekommt man in der ersten Gleichung 2 mal die erste unbekannte Zahl, und 2 mal die 2te, welche auch gleich sind dem Doppelten oder 200; folglich hat man in der ersten Gleichung, daß das Doppelte der ersten und das Doppelte der 2ten 200 mache, in der 2ten, daß das Doppelte der ersten und das Dreifache der 2ten 280 mache.

Das Doppelte in der ersten Gleichung ist gleich dem Doppelten in der 2ten; läßt man in beiden Gleichungen das Doppelte weg, so hat man Gleiches weggethan, und der Unterschied, der statt findet, besteht in der 2ten unbekannten Zahl, die in der ersten Gleichung 2 mal und in der 2ten 3 mal genommen ist; folglich ist auch 1 mal die 2te unbekannte Zahl gleich dem Unterschied, und für diesen hat man in der bekannten 80 angegeben, also ist die 2te unbekannte Zahl 80 ꝛc.

Auf diesem Wege können leicht alle Aufgaben dieser Art gelöset werden, auch sind über solche Aufgaben noch mehr verschiedene Auflösungen gemacht worden, welche ich aber der Kürze wegen übergehe; als Beispiel werde ich noch ein Paar Aufgaben folgen lassen.

Fr. Man denkt 2 Zahlen; 2 mal die erste und ½ mal die 2te sind gleich 100; 3 mal die erste und 4 mal die 2te machen 250. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen?

Um diese Aufgabe wieder zu lösen, erhebt man das Doppelte der ersten unbekannten Zahl in der ersten Gleichung, zum 3fachen der ersten unbekannten in der 2ten Gleichung ꝛc.;

wodurch man wieder in beiden Gleichungen die erste unbekannte Zahl weglassen kann.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon 2½ mal die 1te und 3 mal die 2te 100 machen, und hernach 4⅓ mal die 1te und 4 mal die 2te 120. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyn?

Mit dem Weniger und Negativen kann das Gleiche vorgenommen werden.

Fr. Das Doppelte einer unbekannten Zahl weniger eine 2te machen 100, 4 mal die 1te und 3 mal die 2te machen 400. Es fragt sich: wieviel diese Zahlen seyen?

Antw. Die 1te ist 70, die 2te 40.

Auflösung. Um die 1te unbekannte Zahl in der 1ten Gleichung gleich der 1ten in der 2ten zu machen, muß man das Doppelte 2 mal nehmen; um wieder Gleiches zu erhalten, muß man alles 2 mal wiederholen, wodurch man 4 mal die 1te Zahl, 2 mal die 2te negativ, gleich 200 erhält; thut man in beiden Gleichungen 4 mal die 1te unbekannte Zahl weg, so bleibt in der 1ten Gleichung 2 mal die 2te negativ, und in der 2ten 3 mal dieselbe positiv. Der Unterschied dieser 2 unbekannten Zahlen bildet in den bekannten einen Unterschied von 200, dieser Unterschied ist 5 mal die 2te Zahl, denn von 2 mal der unbekannten negativen Zahl bis auf Nichts, hat es 2 mal die Zahl, und von Nichts bis auf 3 mal die Zahl hat es noch 3 mal dieselbe ꝛc. Wenn das 5fache einer Zahl 200 beträgt, so ist die 1fache der 5te Theil von 200 = 40 ꝛc.

Fr. Wieviel machen die 2 Zahlen, wovon 2½ mal die 1te und 3 mal die 2te 100, und 3⅓ mal die 1te weniger

5 mal die 2te Nichts betragen? oder 10 negativ? oder ½ mal die 1te oder 2te Zahl positiv oder negativ? ꝛc.

Aus diesen einzelnen Aufgaben wird diese Ansicht hinlänglich deutlich seyn. Wer sie noch weiter ausgedehnt haben will, wird das Fehlende noch leicht hinzusetzen können, auch diese Ansicht auf 3, 4 ꝛc. unbekannte Zahlen anwenden, welches aber doch sehr verwickelt würde. Bei 3 unbekannten Zahlen sind 2 bekannte Verhältnisse nicht hinlänglich, um die 3 unbekannten Zahlen zu bestimmen, sondern lassen sie noch unbestimmt.

Zwei unbekannte Zahlen organisch bildend oder durch den 3. §. in Gleichheit gesetzt.

Fr. Mit was für 2 Zahlen muß man 100 und 200 multipliziren, wenn beide einander gleich werden sollen?

Antw. Die 1te mit 2 und die 2te mit 1, oder die 1te mit 4 und die 2te mit 2 ꝛc.; oder allgemein ausgedrückt: die 1te unbekannte multiplizirende muß immer 2 mal so groß seyn, als die 2te, weil die erste bekannte nur halb so groß ist, als die 2te; daher ist sie ½, wenn die 2te ¼ beträgt ꝛc. ꝛc.

Fr. 100 und 300 sollen so mit 2 unbekannten Zahlen, die mit einander 10 machen, multiplizirt werden, daß die 1te gleich wird der 2ten. Es fragt sich: wieviel sie werden?

Antw. Die 1te 7 ½ und die 2te 2 ½.

Auflösung. Die 2te Zahl ist 3 mal so groß als die 1te, folglich wird sie gleich der 1ten, wenn sie nur mit dem 3ten Theil von dem multiplizirt wird, womit man die 1te multiplizirt; also bekommt die 1te unbekannte Zahl 1 Theil, wie

die 2te ⅓ Theil bekommt, oder die 1te bekommt 3 Theile, die 2te 1, zusammen 4 gleiche Theile, die mit einander 10 betragen, also einer den 4ten Theil von 10 = 2 ½. Die 1te unbekannte multiplizirende Zahl hat 3 solcher Theile oder 7 ½, und die andre einen oder 2 ½.

Fr. Mit welchen Zahlen muß man 100 multipliziren, wenn sie gleich werden sollen 100 mit andern Zahlen dividirt?

Antw. 100 kann mit 1, 2, 3, 4 ꝛc. multiplizirt werden, während es mit 1, ½, ⅓, ¼ ꝛc. dividirt wird, wenn sie gleich werden sollen.

Die Auflösung davon ist der obigen ähnlich.

Giebt man die Summe der 2 Zahlen an, mit der 100 multiplizirt und dividirt werden soll, so kommt die Auflösung davon sehr leicht in die 2te Potenz, indem sich ihr Haltungspunkt durch die 2 unbekannten Zahlen ausdrückt.

Wie sich hier diese Ansicht weiter ausdehnen läßt, wird leicht begreiflich seyn, wenn man sieht, wie bisher 1 und 2 unbekannte Zahlen mit 1, 2, 3 und mehrern bekannten auf die möglichst erschöpfende Art verbunden wurden. Ich überlasse die weitere Ausführung einem jeden nach Bedürfniß, und will nun noch in Kürze zeigen, wie dieser §. noch mit der Vergleichung verbunden werden kann.

§. 3. mit §. 4.

Fr. Mit welcher Zahl muß man 100 und mit welcher 50 multipliziren, wenn die 2te um 300 mehr werden soll, als die 1te? Wieviel hat hat es solcher Zahlen? in was für einem Verhältnisse müssen diese multiplizirende Zahlen zu einander stehen?

Fr. Man soll 100 so mit einer Zahl dividiren, daß das Herauskommende der 1ten 40 mehr wird, als 100 mit einer andern Zahl dividirt. Es fragt sich: welches diese Zahlen seyen?

Auflösung. Wird jedes 100 mit 1 dividirt, so erhält man bei beiden Zahlen 100, oder die Zahlen werden einander gleich; nun soll die 1te um 40 mehr werden, als die 2te; wenn ich die 2te durch 1 dividire, so erhalte ich 100; folglich muß ich die 1te Zahl 100 so dividiren, daß es 140 giebt, also muß diese unbekannte Zahl 140 mal in 100 enthalten seyn, folglich ist das 1 malige Enthalten der 140te Theil von 100 = $\frac{100}{140}$ oder $\frac{5}{7}$; folglich muß 100 mit $\frac{5}{7}$ dividirt werden.

Auf ähnliche Art werden alle diese Aufgaben gelöset. —

Fr. Mit welcher Zahl muß man 100 multipliziren und 100 dividiren, wenn die 2te 200 mehr werden soll als die 1te? Wie viel hat es solcher Zahlen? Was haben sie jedesmal für ein Verhältniß zu einander? Ist dieses Verhältniß veränderlich oder unveränderlich?

Giebt man die multiplizirend und dividirend unbekannte Zahl vereiniget an, so fallen auch diese Aufgaben wieder in die 2te Potenz. —

§. 3. mit §. 6.

Fr. Man soll 100 so mit einer Zahl multipliziren, daß das, was herauskommt, 2, 3, 4, 5 mal so groß wird, als 100 mit einer andern Zahl multiplizirt; desgleichen kann man mit dem dividiren oder mit dem multipliziren und dividiren vereinigt vornehmen, und wieder ganz die obigen Fragen machen. Doch ich höre mit diesen Verbindungen auf,

indem die Aufgaben sonst zu schwer würden, und gebe dafür noch einige beliebige Aufgaben, ohne die Verbindungen anzuzeigen, aus denen sie bestehen, wie dieses auch in der Zahl der Fall war. Nicht unwichtig ist für den Lehrer die Bestimmung der §., aus denen diese oder jene Aufgabe gebildet ist. —

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wenn man von der 2ten 1 weg- und zur 1ten hinzusetzt, so werden beide einander gleich; thut man aber von der 2ten 10 weg und zur 1ten hinzu, so wird die 2te ½ so groß als die 1ste; es fragt sich, welches diese Zahlen seyn?

Antw. 28 und 26.

Auflösung. Wenn man von der 1ten 1 wegthut, und zur 2ten hinzusetzt, so wird die 1te um 1 weniger, und die 2te um 1 mehr, und dadurch werden beide einander gleich, folglich ist der Unterschied der 1ten zur 2ten 2, oder die 1te ist um 2 mehr als die 2te. Thut man von der 1ten 10 weg, so wird sie nur um 8 kleiner als die 2te; thut man diese 10 zur 2ten hinzu, so wird die 2te um 10 größer, als sie war; folglich wird jetzt die 1te um 18 weniger, als die 2te, und dafür ist sie auch nur die Hälfte der 2ten, und wenn 18 eine Hälfte ist; so wird die ganze 2te Zahl 36, nachdem 10 hinzugesetzt worden ist, wird sie also um 10 weniger oder 26, die 1te um 2 mehr, oder 28 ꝛc. —

Statt halb so groß, kann man sie auch durch 3tel, 4tel, 5tel ꝛc. oder durch 2 mal, 3 mal ꝛc. so groß, oder durch 2½ mal so groß, oder durch 2¾ mal so groß ꝛc. ausdrücken. — Die Aufgaben und Auflösungen können ganz auf obige Art gemacht werden; eine ziemliche Ausführung dieser Ansicht ist nicht unwichtig; wie überall, so findet auch hier das negative Verhältniß statt.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te um 20 weniger ist, als die 2te; wäre die 2te um 100 mehr als sie ist, so wäre die 1te ¼ von ihr. Es fragt sich, welches diese Zahlen seyen?

Antw. 40 und 60.

Auflösung. Die 2te ist um 20 mehr, als die erste, durch die Bedingung wird sie noch um 100 mehr als 20, oder 120 mehr als die 1te, und dadurch ist die 1te ¼ der 2ten; folglich hat die 2te 3 Theile, wie die 1te 1 Theil hat, und für diese 3 Theile hat sie 120; 1 Theil ist also der 3te Theil von 120 oder 40, und die ganze Zahl hat 4 solcher Theile oder 160, mit der Bedingung, daß sie um 100 größer wäre, als sie ist; 100 von 160 weggethan, bleibt 60; die 1te ist um 20 weniger oder 40.

Fr. Wenn eine Zahl um ¾ von ihr selber mehr wäre, als sie wirklich ist, so wäre sie die Hälfte einer 2ten; thut man aber von dieser 2ten 100 weg, und setzt sie zur 1ten hinzu, so wird die 2te die Hälfte der 1ten. Es fragt sich, was dieses für 2 Zahlen seyen?

Drei unbekannte Zahlen durch den 2ten §. in Gleichheit zu bringen.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, die 1te, 2te und 3te machen 100; 2 mal die 1te, und 3 mal die 2te, machen ebenfalls 100. Es fragt sich: was dieses für 3 Zahlen seyen?

Auflösung. (Daß diese 3 Zahlen unbestimmt sind, ist leicht einzusehen, ich gehe deswegen auch gleich zu der Auflösung selber über.)

Weil die 3te unbekannte Zahl nur in der 1ten Gleichung ist, so thue ich dieselbe weg, und zwar rechne ich so

viel für sie an, daß 2 mal die 1te und 3 mal die 2te doch noch 100 machen können; 2 mal eine und 3 mal eine 2te machen immer etwas mehr als das Doppelte der 1ten und 2ten, folglich nehme ich etwas weniger als die Hälfte für das Einfache der 1ten und 2ten von 100, 49, 48 oder 45 ꝛc. an, für diesen Fall nehme ich 45, wodurch man für die 2te Gleichung 2 mal die 1te und 3 mal die 2te = 100 und für die 1te Gleichung 1 mal die 1te und 1 mal die 2te 45 erhält; die fernere Auflösung geht, wie bei 2 unbekannten Zahlen, unorganisch bildend ausgedrückt.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, die 1te, 2te und 3te betragen 100, 2 mal die 1te, 2 mal die 2te und 3 mal die 3te machen 210. Es fragt sich: was dieses für 3 Zahlen seyen?

Auflösung. In der 2ten Gleichung nahm man die 1te, 2te und 3te unbekannte Zahl doppelt, mehr die 3te noch darüber, und dafür würde in der bekannten, das von allen 3 auch doppelt genommen, mehr 10. Denn 210 ist 2 mal 100 + 10; folglich beträgt das Einfache der 3ten unbekannten Zahl 10; also bekömmt man für die 1te Gleichung die 1te und 2te unbekannte Zahl gleich 90, und für die 2te, 2mal die 1te und 2 mal die 2te 210 weniger 30 oder 180, folglich hat man hier für die 2 unbekannten Zahlen wieder nur eine Gleichung: denn daß das Doppelte gleich ist dem Doppelten, versteht sich ohne Angabe; also kann man für die 1te unbekannte Zahl eine beliebige annehmen, doch so, daß sie weniger als 90 ist, denn die 1te und 2te machen 90; ich nehme deswegen 70 für dieselbe an; wodurch die 2te 20 wird, eben so hätte man 60 annehmen können.

Auch kann hier die eine als negativ angenommen werden. —

Fr. Wieviel betragen die 3 Zahlen, wovon die 1te und 2te zusammen 100 machen, wovon ferner 2mal die 1te und 3 mal die 3te wieder 100, und wovon 4 mal die 2te und 6 mal die 3te endlich 180 machen? —

Wie auch solche Aufgaben auf obige Art gelöset werden, wird man einsehen; nöthig ist es nicht, daß man die Misse zu weit führe; sondern dies sollen Aufgaben für den Ausgezeichneten seyn; er soll nicht einmal mehr bei diesen stehen bleiben, er kann und soll ins Unendliche fortschreiten. — In dieser Ueberzeugung höre ich auf, und gehe zu der Bezeichnung und Auflösung dieser unbekannten Größen mit Buchstaben, und mache mich anheischig, jede Aufgabe des 1ten Grads ohne alle Formeln zu lösen, oder noch besser meine Schüler so zu führen, daß sie dieselben durch reine Vernunftschlüsse lösen.

Ehe ich aber zur algebraischen Bezeichnung gehe, will ich noch diejenigen Aufgaben der arithmetischen Progression auflösen, die ohne Gebrauch der Potenz gelöset werden müssen. — Die geometrischen gehören ganz zu den Potenzen.

Fr. Man denket 10 Zahlen, wovon alle gleich steigen, die 1te ist 4, und alle zusammen betragen 1000. Es fragt sich: wie ihr Steigendes seye?

Antw. 21 ⅓.

Auflösung. Wenn alle gleich steigen, so beträgt die 1te und 10te so viel, als die 2te und 9te, als die 3te und 8te rc.; in allem hat es 5 mal 2 solcher Zahlen. 1 mal 2 ist der 5te Theil von 5 mal 2, also betragen sie auch den 5ten Theil von 1000 oder 200, folglich macht die 1ste und 10te Zahl zusammen 200; in der 10ten Zahl ist 9 mal das Steigende, und 1 mal die 1te enthalten, in der 1ten und 10ten ist also

2 mal die 1te und 9 mal das Steigende, oder der Unterschied. Die 1te ist 4, und 2 mal diese macht 2 mal 4=8, 8 von 200 weggethan, bleibt noch 192 für den 9maligen Unterschied, der 1 malige wird der 9te Theil von 192=21 ⅓, folglich ist das Steigende 21 ⅓.

Obige Aufgabe soll bei 11 Zahlen 1000 machen. Es fragt sich: wieviel das Steigende sey?

Auflösung. Hier hat es 5 ½ mal 2 Zahlen; die in der Mitte wird die Hälfte von der Summe 2er, auf obige Art, zusammengestellter Zahlen; alles zu Halben gemacht giebt 11/2 für die 1te und 11 zusammengenommen, erhält man 2 Halle oder 2/11 der Summe aller Zahlen oder Glieder, die 1000 machen; folglich machen sie 2/11 von 1000 = 181 9/11; in der 1ten und 11ten Zahl ist 2 mal die 1te, und 10 mal das Steigende enthalten, die 1ste ist 4, und 2 mal dieselbe gleich 2 mal 4 = 8, folglich bleibt für 10 mal den Unterschied noch 173 9/11 ꝛc.

Statt daß man das Steigende als unbekannt angab, kann auch das 1te Glied oder die 1te Zahl der Reihen unbekannt angegeben werden. Z. E.

Fr. Man denkt 10 Zahlen, wovon das Steigende 2, und die Summe aller Glieder 200 macht. Es fragt sich, wieviel die 1te sey?

Auflösung. Die 1te und 10te machen den 5ten Theil der Summe aller Glieder; folglich auch den 5ten Theil von 200 = 40. In der 1ten und 10ten Zahl ist 9 mal der Unterschied, und 2 mal die 1te Zahl. Der Unterschied oder das Steigende beträgt in den 9 malen, 9 mal 2 = 18; 18 von 40 weggethan, bleibt für 2 mal die 1te noch 22, und für 1 mal dieselbe noch 11. Desgleichen kann gefragt werden, wenn die Anzahl der Glieder ungerad ist. —

Folgende Aufgabe kann nicht ohne Potenz gelöset werden.

Fr. Wieviel Zahlen oder Glieder werden erfordert, wenn die 1te 1, das Steigende 2, und die Summe aller Glieder 200 betragen soll?

Wenn das letzte Glied statt der Summe 200 betragen soll, so kann die Aufgabe wieder ohne Potenzen gelöset werden. —

Die Behandlung der Brüche ist gleich der der Ganzen. —

Vom algebraischen schriftlichen Rechnen.

§. 1.

Von der allgemeinen oder algebraischen Bezeichnung der Zahlen oder Größen.

Lehren: Um eine jede Zahl oder Größe allgemein mit einem Zeichen auszudrücken, müssen solche angenommen werden, denen ein beliebiger Werth beigelegt werden kann. (Daß die gewöhnlichen Zahlzeichen nicht gebraucht werden können, ergiebt sich schon aus ihrem beschränkten Begriff) diese sind daher gewöhnlich die Buchstaben des Alphabets, eben so gut könnten andere Zeichen, wie das Rund, das Zweieck, das Dreieck rc. angenommen werden. — Doch wir bleiben bei den angenommenen Zeichen.

Unter den Buchstaben a, b rc. kann man sich jede beliebige Zahl denken oder vorstellen.

Eben so kann man sich 10 rc. unter jedem Buchstaben denken.

Hat man sich unter einem Buchstaben einmal eine Größe gedacht, so wird 2, 3, 4 mal diese Zahl unter 2, 3, 4 mal dem gleichen Zeichen gedacht oder vorgestellt ꝛc. 1te Wahrheit oder Satz, auf dem die Behandlungsart der Zeichen beruht.

Lehr. Stellt auf dieses hin 2 mal eine gleiche Zahl auf euern Schiefertafeln mit diesen Zeichen dar. Die Schüler werden a und a, b und b oder c und c ꝛc. machen.

Desgleichen kann man sie 3, 4, 5 mal ꝛc. eine gleiche Zahl darstellen lassen. Um 100 mal eine Zahl mit Zeichen auszudrücken, muß man hundert mal den nämlichen Buchstaben machen, dieses wäre aber zu weitläufig und schwerfällig, man gebraucht daher aus diesem Grunde für die Zahl Hundert ꝛc. Ziffern, und drückt es auf folgende Art aus, 100 a oder 100 b ꝛc.

Lehr. Welcher von euch kann 364 mal eine Größe ausdrücken?

Auch kann der Lehrer dann und wann eine Größen-Bezeichnung durch Buchstaben auf die Tafel machen, und sie fragen, was diese Zeichen ausdrücken? 20 g drückt nothwendig 20 mal eine und die nämliche Zahl oder Größe aus. Diese kann seyn 1, 2, 3 ꝛc. oder ⅓, ¼ ꝛc. kurz, was man will.

Lehr. Wie drückt man auf dieses hin 2, 3 verschiedene Zahlen oder Größen allgemein aus?

Antw. Mit 2, 3 ꝛc. verschiedenen Buchstaben.

Lehr. Drückt 10 verschiedene Zahlen allgemein auf euren Tafeln aus. Die Schüler werden a, b, c ꝛc. machen.

Lehr. Bezeichnet 100 mal eine gleiche, und 3 verschiedene Zahlen auf euere Schiefertafeln ꝛc.

Der Lehrer macht folgende Reihenfolge auf die Tafel, und läßt die Schüler bestimmen, was diese Zeichen ausdrücken 10 a, 13 b, 4 g, m, n. — Sie werden nach dem Obigen fassen, daß 10 a, 10 mal eine gewisse Größe oder Zahl ausdrücke, daß 13 b, 13 mal eine gewisse gleiche, aber von a, g, m und n verschiedene Größe und Zahl ꝛc. bezeichne.

Fr. Wieviel verschiedene Größen sind in dieser Reihenfolge ausgedrückt?

Antw. 5.

§. a.

Von der Bezeichnung des Bruchs durch allgemeine Größen.

Lehr. Wie drückt man eine allgemeine Größe aus?

Antw. Durch einen beliebigen Buchstaben.

Darauf fährt der Lehrer fort: Um die Hälfte, das Drittel ꝛc. auszudrücken, muß man dieses wieder schreiben, wie bei der Zahl; folglich bezeichnet man die Hälfte irgend einer Zahl so: $\frac{a}{2}$ oder $\frac{b}{2}$ ꝛc.

Lehr. Drückt ⅓, ¼, ⅙ ꝛc. einer beliebigen Zahl oder Größe aus?

Die Schüler werden $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{4}$, $\frac{a}{5}$ machen.

Lehr. Drückt ⅔, ¾, ⅘ ꝛc. einer jeden beliebigen Zahl aus?

Antw. $\frac{2a}{3}$, $\frac{3a}{4}$, $\frac{4a}{5}$ ꝛc.

Der Lehrer kann wieder, wie oben, eine Reihenfolge auf die Tafel machen, und die Schüler wieder fragen: was diese Bezeichnung ausdrücke?

Fr. Wie drückt ihr 2 ⅔ mal eine beliebige Zahl aus?

Antw. 2 a und $\frac{2\,a}{3}$ oder noch kürzer und besser: $\frac{8\,a}{3}$; denn die Größe oder Zahl hat ⅗tel oder 2 mal dieselbe macht 6/3, 6/3 und ⅔ machen 8/3, nun soll aber dieses nicht nur 8/3, sondern 8/3 von einer beliebigen Zahl seyn, folglich $\frac{8\,a}{3}$ oder $\frac{8\,b}{3}$ ꝛc.

Die weitere Ausführung wird einem jeden leicht seyn.

Nachdem die Bezeichnung der allgemeinen Größen entwickelt ist, kann man diese auf die unorganische und organische Bildung und Vergleichung anwenden; worüber folgende §§. Auskunft geben werden.

§. 2.

Von dem algebraischen unorganischen Bilden und Aufheben einer unbekannten Größe oder Zahl mit bekannten verbunden. —

Lehr. Seht, wie viel 100 mal eine gewisse Größe oder Zahl mehr 33 mal dieselbe weniger 1000 mal dieselbe + 100 weniger ꝛc. mache?

Sie werden bei den bekannten und unbekannten Zahlen oder Größen weniger bekommen.

So wie hier positive Größen zu einander gezählt und von einander abgezogen worden sind, so können auch nega-

tive und positive Größen, und negative allein behandelt werden, welches schwerer einzusehen und zu begreifen ist, als die mit positiven Größen. —

Fr. Wieviel entsteht, wenn man 20 a negativ, oder 20 mal eine Größe a zu 100 a positiv zählt?

Antw. 80 a positiv.

Auflösung. Setzt man etwas zu den 100 a, so werden die 100 a um das größer, was hinzugesetzt worden ist. Wird etwas weniger hinzugesetzt, so werden sie um dasjenige, was weniger hinzugesetzt worden ist, weniger; beim Nichtshinzusetzen giebt es 100 a, werden noch 20 a weniger als dieses, oder 20 a negativ hinzugesetzt, so entsteht auch 20 a weniger als vorhin, und 20 a weniger als 100 a sind = 80 a, also giebt es 80 a.

Aus diesem folgt also allgemein: daß beim Hinzusetzen einer negativen Größe zu einer positiven, die negative Größe eben so viel von der positiven aufhebt, als sie selber ist. Ist die negative gerade so groß als die positive, so bleibt nichts; ist die negative kleiner, so bleibt noch etwas Positives, und im entgegengesetzten Falle etwas Negatives. 3ter Satz.

Auf die nämliche Art kann Negatives zu Negativen gesetzt, erklärt und aufgelöset werden.

Vom Abziehen negativer Größen von positiven ꝛc.

Fr. Wieviel entsteht, wenn man a negativ, von 3 a positiv wegthut?

Antw. 4 a.

Auflösung. Wenn man von 3 a nichts wegthut, so bleiben noch 3 a; thut man etwas weg, so bleibt um das Weggethane weniger; thut man weniger als dieses, und noch mehr weniger weg, so bleibt um dieses mehr, beim Nichts blieb 3 a, folglich muß bei einem a weniger als Nichts auch a mehr als 3 a bleiben, a mehr als 3 a sind 4 a.

Auf eine andere Art aufgelöset:

Wenn man von 3 a, a positiv wegthut, so bleiben noch 2 a positiv; man thut aber nicht a positiv, sondern a negativ weg, also 2 a weniger, (denn von einer Größe bis auf nichts hat es einmal dieselbe), folglich bleiben auch 2 a mehr als vorhin bei 2 a, welches 4 a sind.

Auf diese Art kann man ihnen mehrere Beispiele von unbekannten und bekannten Zahlen geben, bis sie endlich fähig werden, die allgemeine Regel des Verfahrens aufzustellen, welche etwa auf folgende Art lauten wird:

Wenn man eine negative Größe von einer positiven wegthut, so muß die negative positiv zu den anderen positiven Zahlen gesetzt werden. Zieht man auf diese Art eine negative Größe von einer negativen ab, die ihr gleich ist, so bleibt nichts; ist die abziehende negative größer als die andere negative, so bleibt das, was größer ist, positiv, und im entgegengesetzten Fall bleibt dieses negativ. 4ter Satz.

Um dieses mit Zeichen auszudrücken, sollte 2 mal das Zeichen weniger gebraucht werden, welches aber auch das Gleichheitszeichen giebt, deswegen wird es auf folgende Art statt übereinander, voreinander gesetzt.

3 a	— 4 a	— a.	— 4 a
— — a.	— — 4 a.	— — 4 a	— — 3 a.
giebt 4 a.	giebt —	giebt 3 a,	giebt, — a.

Auch kann die Behandlungsart der Zeichen von den Schülern abstrahirt werden. —

§. 3.

Von der algebraisch organischen Bildung und Aufhebung einer unbekannten Zahl mit bekannten verbunden.

Eine unbekannte Zahl mit einer bekannten multiplicirt, giebt, was die unbekannte Zahl mit der bekannten absolut ausgedrückt, sagt; es wird deswegen übergangen.

Fr. Wie viel macht 3 ½ a mit 100 multiplizirt.

Die Auflösung ist ganz so, wie die der reinen Zahlen; desgleichen beim Dividiren, welches aus gleichem Grunde ebenfalls übergangen wird.

Fr. Seht, wie viel b — 10 mit 10 multiplizirt giebt?

1) b — 10	2) × b — 10	3) b — 10
× 10	× 10	× 10
	10 b — 100	

4) × b — 10
10

(Um anzuzeigen, daß etwas mit einander multiplizirt werden soll, braucht man dieses Zeichen ×. Die Aufgabe kann auf eine jede der obigen 4 Arten ausgedrückt werden; die 1te ist die einfachste).

Auflösung. Wenn b — 10 mit 10 multiplizirt werden soll, so muß b — 10, 10 mal genommen werden; nimmt

man b, 10 mal, so bekommt man 10 b, dadurch hat man aber auch jedesmal 10 zu viel genommen, weil man nicht b, sondern b — 10, 10 mal nehmen soll, folglich muß man 10 mal 10 von 10 b wegthun, welches 10 b — 100 giebt.

Lehr. Wie viel ist 3 q — 10 mit 10 ¾ multiplizirt?

$$\begin{array}{l} 3q - 10 \\ \times \\ 10\,\tfrac{3}{4} \\ \hline 32\,\tfrac{1}{4}\,q - 107\,\tfrac{1}{2}. \end{array}$$

Die Auflösung wie oben.

Lehr. Wieviel beträgt 10 — y mit 10 multiplizirt?

$$\begin{array}{l} 10 - y \\ \times \\ 10 \\ \hline 100 - 10y \end{array}$$

Noch ein Paar Fragen über diese Aufgabe.

Fr. Welches ist mehr, 100 oder die 10y?

Antw. Es ist unbestimmt, ob 100 oder 10 y mehr sey.

Fr. Wenn aber in unserer letzten Aufgabe 10 mehr ist als y, wird 100 oder 10 y mehr seyn.

Daß auch diese Auflösung leicht durch geistige Schlüsse gemacht werden kann, bedarf nicht mehr erwähnt zu werden. — Dies kann leicht weiter ausgedehnt werden. —

Fr. Wieviel giebt eine unbekannte Zahl, mit sich selbst multiplizirt?

Antw. Eine Quadratzahl, oder eine Zahl, welche so oft so viel Einheiten hat, als die unbekannte Zahl selbst Einheiten enthält.

Dieses wird auf folgende Art ausgedrückt: a × a oder die a werden ohne das Malzeichen auf diese Art aa neben einander gesetzt, welches a mal a heißt:

$$\begin{array}{l} a + 1 \\ \times \\ a \\ \hline aa + a \text{ oder } a \times a + 1\,a \end{array}$$

Der 1te Ausdruck ist der einfachste.

$$\begin{array}{l} a - 1 \\ \times \\ a \\ \hline aa - a \end{array}$$

Auflösung der 2ten Aufgabe. — Wenn man a, a mal nimmt, so wiederholt man es um 1 mal zu viel, und zwar um a mal, weil man nicht a, sondern a — 1, a mal nehmen soll, folglich muß man von a mal a, a abziehen oder negativ setzen. —

Hier folgen zur Uebung noch ein Paar Aufgaben.

$$\left.\begin{array}{l} a - 3 \\ \times \\ a \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 3\,a - 3 \\ \\ a \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 4\,a - 10 \\ 3\,a \\ \hline 12\,a\,a - 30\,a. \end{array}$$

Auflösung der letzten Aufgabe. a mit a multiplicirt, giebt aa, oder a × a, wäre 4 a auf diese Art mit 1 a multiplizirt worden, so würde es 4 aa gegeben haben, nun ist es mit 3 a oder mit 3 mal einer Größe a multiplizirt worden, folglich giebt es auch 3 mal 4 aa = 12 aa.

Die fernere Auflösung ist wie bei den vorhergehenden Aufgaben.

$$\begin{array}{l} a + 1 \\ a + 1 \\ \hline aa + a + a + 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - 1 \\ a + 1 \\ \hline aa - a + a - 1 \text{ oder} \end{array}$$

zusammengezogen $aa - 1$.

Auflösung. Man soll $a - 1$, $a + 1$ mal wiederholen; wenn man $a - 1$, a mal nimmt, so bekommt man nach den obigen Auflösungen $aa - a$; nun soll man aber $a - 1$ nicht nur a mal, sondern noch 1 mal nehmen, folglich noch 1 mal $a - 1$, und dieses giebt wieder aus ähnlichen Gründen $a - 1$; zusammengezählt giebt es $aa - 1$.

Eben so kann man bestimmen lassen, was $a - 1$ mit sich selbst ꝛc. multiplizirt, giebt?

$$\begin{array}{l} a - 1 \\ a - 1 \\ \hline aa - 2a + 1. \end{array}$$

Auflösung. $a - 1$ mit a multiplizirt, giebt $aa - a$; dadurch, daß man $a - 1$, a mal nimmt, hat man es 1 mal zu viel genommen, weil man es nicht a ×, sondern a weniger 1 × nehmen muß; folglich muß man es 1 mal weniger nehmen oder kleiner machen; $aa - a$, um $1 \times a$ kleiner gemacht, giebt $aa - a - a$; nun soll es aber nicht um a kleiner gemacht werden, sondern um $a - 1$; also hat man es um 1 zu klein gemacht; wird dieses wieder ersetzt, so erhält man $aa - 2a + 1$.

Eben so kann man mehrmal eine unbekannte Zahl mit der einfachen oder mehrfachen mehr einer bekannten multipliziren lassen, welches wieder ganz so gehet, wie das Vorhergehende. Ich überlasse die Ausführung desselben einem jeden nach Gutfinden.

Ist das Multipliziren mit der positiven oder negativen Größe auf diese Art durchgeführt, so kann man allgemein aufsuchen und zusammenstellen lassen, was Negatives mit Positivem, und umgekehrt Positives mit Negativem multiplizirt hervorbringe.

Und man wird allgemein finden, daß Negatives mit Positivem, und Positives mit Negativem multiplizirt, immer eine negative Größe oder Zahl giebt. 4ter Satz. Ferner wird man finden, daß Negatives mit Negativem multiplizirt, immer Positives giebt. 5ter Satz.

Hier war das Negative immer in Beziehung auf das Positive gesetzt worden. Wie ich in der Zahl schon sagte, ist das Nichts eigentlich der Uebergang von dem Positiven zum Negativen, oder der Haltungs-Punkt desselben. Um den 4ten und 5ten Satz noch in seinem ganzen Umfang vollgültig zu machen, muß man noch Negatives und Positives allein, und eben so Negatives mit Negativem allein multipliziren, welches also am schicklichsten mit dem Nichts in Beziehung gesetzt werden kann. So giebt a mit weniger 1 multiplizirt a negativ.

Auflösung. Wenn man eine Zahl a gar nicht nimmt, oder nichts mal nimmt, so bekommt man Nichts; und dadurch hat man sie aber ein mal zu viel genommen, weil man sie 1 mal weniger als Nichts nehmen muß, folglich muß man a davon abziehen, und man bekommt also a negativ.

$$\begin{array}{ll} -a & \text{〃} - a \\ \times & \times \\ -a & \text{〃} - a. \\ \hline \times aa & \text{〃}\times\text{〃} - \text{〃}a - \text{〃}a + aa. \end{array}$$

Auflösung. Um dieses wieder zu lösen, denkt man sich Nichts von — a, welches durch 2 Striche bezeichnet wird, dann geht die fernere Auflösung theils wie oben, und theils wie bei a — 1 mit a — 1 multiplizirt, wodurch man Nichts mal Nichts weniger 2 mal Nichts mal a, mehr aa, oder a mal a bekommt; folglich ist der 4te und 5te Satz ganz allgemein als wahr erwiesen.

Aus der Art und Weise, wie hier das Multiplizirem behandelt worden ist, wird es klar seyn, daß es nicht um die Potenzen zu thun war, sondern um das veränderte Verhältniß, das im Multipliziren entsteht, wenn man Negatives mit Negativem ꝛc. multiplizirt. — Die Behandlungsart oder Ausführung der Potenzen ist eine eigne und höhere Stufe, und wird deswegen in dem zweiten Theil dieses Werks ausgeführt werden. — Aus diesem Grund braucht man hier den Unterschied zwischen Exponent und Coeffizient nicht, weil dieses ebenfalls Ausdrücke dieser höheren Stufe sind.

Wie das Multiplizirem behandelt worden ist, so kann auch das Dividiren betrieben werden; wie es im Multiplizirem eine Menge leichter Uebungen gab, so giebt es deren auch hier. — Das Wesentliche und Schwere ist aber wieder das Dividiren mit negativen Größen in positive, wodurch ihr Werth wieder, wie beim Multipliziren, geändert wird.

Fr. Seht, wie oft a in a, 2 a, in 3 a ꝛc. enthalten ist?

Antw. a ist in a 1 mal, in 2 a 2 mal ꝛc. enthalten.

Fr. Wie oft ist aber a in a a, in 2 a a ꝛc. enthalten?

Antw. In aa ist a, a mal, in 2aa ist a, 2a mal enthalten rc.

Auflösung. Bei aa ist die Größe oder die Zahl a so oft wiederholt worden, als a Einheiten hat; folglich ist die nämliche Größe auch wieder a mal darinn enthalten. Eben so wird das Uebrige aufgelöset.

Fr. Wie oft ist a in aa + a enthalten?

Antw. a + 1 mal. Es findet wieder die obige Auflösung statt.

Fr. Wie oft ist a in aa — a enthalten?

Antw. a — 1 mal.

Auflösung. Nach der obigen Auflösung ist a in aa gerade a mal enthalten, nun aber hat man nicht aa, sondern aa weniger a; aa weniger a ist aber um 1 × a kleiner als aa; in aa war a gerade a × enthalten; in aa — a ist es also 1 × weniger enthalten; 1 × weniger als a × ist aber so viel als a — 1 mal.

So kann man wieder eine ganze Reihenfolge aufstellen lassen; z. E.: Wie oft ist a in 2aa — a, 3aa — a, 4aa — 5a, 4½ aa — 10 a, 3⅔ aa — 14½ a rc. enthalten? Auch kann man 2 mal die Größe a nehmen, und das Obige untersuchen lassen, was ein jeder ohne Mühe weiter ausführen wird.

Bei den folgenden Beispielen ist es gut, wenn man auf das reine Aufgehen Rücksicht nimmt, weil es hauptsächlich um das Verhältniß der positiven und negativen Größen in dieser Beziehung zu thun ist. —

Fr. Wie oft ist a — 1 in aa — a enthalten?

Antw. a mal.

Auflösung. a ist in $aa - a$ nach der obigen Auflösung $a - 1$ mal enthalten; nun hat man nicht a, sondern 1 weniger als a oder $a - 1$; folglich ist es auch 1 mal mehr als $a - 1$ mal darinn enthalten; 1 mehr hebt 1 negativ gerade auf, folglich ist $a - 1$ in $aa - a$ a mal enthalten rc. —

Um Aufgaben zu bekommen, die rein aufgehen, kann man zuerst die dividirende Summe durch das Multiplizirѐn hervorbringen.

Fr. Wie oft ist $a - 1$ in $aa - 2a + 1$ enthalten?

Antw. $a - 1$ mal.

Auflösung. Nach der obigen Auflösung ist $a - 1$ in $aa - a$, a mal enthalten, zieht man dieses von $aa - 2a + 1$ ab, so bleibt noch $- a + 1$. Jetzt muß man noch untersuchen, wie oft $a - 1$ in $- a + 1$ enthalten sey? Bis a allein in weniger a allein 1 mal enthalten ist, fehlt noch 2 mal die Größe a, folglich ist a auch 2 mal weniger als 1 mal in derselben enthalten, 2 mal weniger als 1 mal ist ein negatives Mal; 1 negativ mit $a - 1$ multiplizirt, giebt $- a + 1$, dieses von $a + 1$ abgezogen, bleibt nichts mehr; folglich ist $a - 1$ in $aa - 2a + 1$, $a - 1$ mal enthalten.

Also fließt aus diesem: Positives in Negatives dividirt, giebt Negatives und umgekehrt. 6ter Satz.

Ferner: Negatives in Negatives dividirt, giebt Positives. 7ter Satz.

Um dieses noch allgemeiner zu beweisen, könnte man noch mit Negativem allein in Negatives dividiren, wobei das Negative wieder in Beziehung mit dem Nichts gesetzt werden muß, welches jedoch nicht mehr nöthig ist, wenn man das Dividiren als das Umgekehrte des Multiplizirens zu begreifen fähig ist, und die obige Auflösung ganz aufgefaßt hat;

als Uebung kann man jedoch mit Negativem allein in Positives dividiren, welches besonders bei ganz schwachen Schülern nöthig ist; welches aber im 2ten Cursus gemacht werden kann, weil diese Aufgaben ganz geistig aufzulösen sehr schwer sind.

Wie bisher eine unbekannte Zahl, mit bekannten verbunden, unorganisch oder organisch bildend durchgeführt worden ist, so können auch 2 und mehrere unbekannte mit bekannten auf diese Art behandelt werden, welches ich aber für einmal nicht weiter ausführe, sondern zuerst eine unbekannte Größe mit mehreren bekannten in die unorganische und organische Gleichheit setzen will.

§. 4.

Von der algebraisch unorganischen Vergleichung einer unbekannten Zahl mit einer oder mehreren bekannten.

Fr. Kann eine unbekannte Größe gleich seyn, 1, 2, 3, ꝛc.?

(Um die Gleichheit auszudrücken, braucht man folgendes Zeichen $=$).

Wenn $a = 10$ ist, wem wird Nichts gleich seyn? und zwar so ausgedrückt, daß die bekannte und unbekannte Größe in der Gleichung vorkommt.

Antw. Nichts ist gleich $a - 10$; denn um Nichts zu erhalten, muß man von a, a wegthun, und foglich muß man eben so viel von 10 wegthun, wodurch man, dieses mit

Zeichen ausgedrückt, „ = 10 — a erhält (Hier ist es nicht zweckmäßig, für Nichts die Nulle anzunehmen).

$$a + 10 + 9 = 100.$$

Es fragt sich, wem a gleich sey, ohne daß eine von diesen bekannten Zahlen aus der Gleichung wegfällt?

$$a = 100 - 9 - 10.$$

Auflösung. Denn von a + 10 + 9, welches gleich ist 100, thut man 10 und 9 weg, folglich muß man von dem, was ihm = ist oder von 100 auch so viel wegthun. Nun darf dieses nicht real aus der Gleichung weggethan, sondern dies Wegnehmen muß nur durch Zeichen ausgedrückt werden, und zwar so, daß die Gleichheit dadurch nicht gestört wird. So erhält man alsdann

$$a = 100 - 9 - 10.$$

$$10\,a + 10\tfrac{1}{2} + 13\tfrac{1}{3} = 200 + 40.$$

Es fragt sich, wem 10 a gleich sey, ohne daß eine von den bekannten Zahlen aus der Gleichung wegfalle?

Sie werden aus den vorhergegangenen Gründen finden, daß die $10\,a = 200 + 40 - 10\tfrac{1}{2} - 13\tfrac{1}{3}$ sey.

Wem wird aber $10\tfrac{1}{2}$ gleich seyn, ohne daß wieder etwas aus der Gleichung wegfällt?

$$10\tfrac{1}{2} = 200 + 40 - 10\,a - 13\tfrac{1}{3}.$$

Denn bei $10\,a + 10\tfrac{1}{2} + 13\tfrac{1}{3}$ wird $10\,a + 13\tfrac{1}{3}$ weggethan, folglich muß von seinen Gleichen oder von 200 + 40 auch so viel weggethan werden; nun kann dieses nicht real abgezogen werden, folglich muß es durch das Abziehungszeichen, welches ich zu 200 + 40 setze, geschehen.

Aus dem nämlichen Grund wird $10\,a + 13\tfrac{1}{3} = 200 + 40 - 10\tfrac{1}{2}$ rc.

Aus diesem fließt also allgemein der Grundsatz: Wenn man in einem Glied einer Gleichung eine oder mehrere bekannte oder unbekannte positive Größen wegstreicht, so muß das Nämliche auch von dem, was ihm = ist, oder vom 2ten Glied der Gleichung weggethan werden, und wenn die Zahlen in der Gleichung bleiben müssen, so müssen sie auf der andern Seite als negativ bezeichnet werden. 8ter Satz.

$a - 10 - 30 = 100$; wem ist a allein gleich, ohne daß wieder eine Größe aus der Gleichung wegfällt, auch müssen sie nicht zusammengezogen werden, denn dieses würde im Anfang erschweren.

Man wird finden: $a = 100 + 10 + 30$; denn von a muß 10 und 30 weggethan werden, bis es gleich wird 100; hat man a allein, so thut man die 10 und 30 nicht weg, folglich ist es um $10 + 30$ größer oder mehr als 100; um also wieder Gleiches zu erhalten, muß eben so viel zu 100 hinzugesetzt werden, und man erhält $a = 100 + 10 + 30$. —

Auf die nämliche Art können, wenn man es nöthig findet, noch mehrere Aufgaben gegeben werden.

Folglich kann man wieder allgemein sagen: Wenn man von einem Glied einer Gleichung eine negative Größe wegthat, so muß dieselbe Größe positiv zum andern Glied gesetzt werden. 9ter Satz.

Hier folgen noch ein Paar Aufgaben über die Verbindung dieser letzten 2 Sätze. —

$a + 10 - 100 = 1000$.

Wem ist a allein gleich? Wem 10? wem -100? ꝛc. —

Dadurch wird das Versetzen der positiven und negativen Größen von einem Glied ins andere hinlänglich deutlich werden. Ich werde noch ein Paar Fragen über das doppelte Versetzen geben. Z. E.

$a + 13\frac{1}{3} + 100 = 100\,a - 1000.$

Wem ist $a - 100\,a$ gleich, ohne daß man eine Größe aus der Gleichung wegthut?

$a - 100\,a = -1000 - 13\frac{1}{3} - 100.$

Um 100 a negativ zu bekommen, thue ich sie von 100 a = 1000 weg, dadurch mache ich das 2te Glied um dieses kleiner, folglich muß man auch das 1te um eben dieses kleiner machen, und man erhält aus obigem Grund

$a + 13\frac{1}{3} + 100 - 100\,a = -1000.$

Die fernere Auflösung ist wie oben. —

Auf der Tafel oder auf dem Papier kann man die Schüler dieses etwa auf folgende Art darstellen lassen.

$a + 13\frac{1}{3} + 100 = \cancel{100}\,a - 1000$

$a + \cancel{13\frac{1}{3}} + \cancel{100} - 100\,a = -1000$

$a - 100\,a = -1000 - 13\frac{1}{3} - 100.$

(Jedes mal wird das, was von einem Glied ins andere versetzt wird, mit 2 schiefen gleichlaufenden Linien durchstrichen werden.

Schwerer als dieses ist die Beantwortung der Frage: Wem a + 100 a (beide positiv) gleich seyn, ohne daß wieder etwas hinzugesetzt, noch weggelassen wird. — Dieses ist sogar nicht einmal möglich; diese Unmöglichkeit soll aber der Schüler so gut erfahren als der Lehrer; man gebe ihm deswegen die obige Aufgabe gleich, ohne einige Bemerkung. —

Er wird wahrscheinlich zuerst sehen, wem 100 a allein gleich seyen, hernach a, dann 100 a, und a zusammenzählen, wie hier folgt: —

$$100\,a = a + 13\tfrac{1}{3} + 100 + 1000$$
$$a = 100\,a - 1000 - 13\tfrac{1}{3} - 100$$

$$100\,a + a = a + 13\tfrac{1}{3} \text{ ꝛc.}$$

In diesem Fall wird freilich keine fremde Größe hinzugesetzt, wohl aber die der Gleichung verdoppelt, welches eben so wenig seyn darf. Oder er wird sehen, wem 100 a allein gleich sind, und hernach a negativ in das nämliche Glied setzen, und darauf so viel a hinzusetzen, daß das a positiv wird, welches 2 a erfordert, denn von negativ a bis auf Nichts erfordert es a; weil hier 2 a hinzugesetzt worden sind, um nur statt des negativen a ein positives zu bekommen, so muß auf der andern Seite oder im andern Glied auch 2 a hinzugesetzt werden, folglich müssen neue Zahlen zur Gleichung hinzugesetzt werden, welches nach der Angab wieder nicht seyn darf, folglich ist dieses unmöglich — und man kann allgemein sagen; 2 Größen, die in den beiden Gliedern einer Gleichung sind, können nicht in ein Glied gebracht werden, ohne etwas hinzuzusetzen oder wegzuthun, oder ohne das bestehende mehr mal zu nehmen, wenn beide Größen positiv oder beide negativ, und wieder beide positiv oder negativ werden sollen ꝛc. 10ter Satz.

Eine Aufgabe, in welcher die Größen getrennt werden, welches aber nicht wichtig ist.

Wenn 10 a — 100 = 30 + a ist, wem ist 5 a — 100 gleich? oder wem ist 3 a — 10 gleich?

In der 2ten Frage hat man 7 a positiv und 90 negativ im ersten Glied weggethan, folglich muß nach dem 8ten Satz 7 a negativ ins andere Glied gesetzt werden ꝛc.

§. 5.

Von der organischen Vergleichung einer unbekannten Größe mit bekannten.

Hier dürfen die bekannten wie die unbekannten beliebig vermehrt und vermindert werden; das Wesentliche hiebei aber ist das, daß das Unbekannte immer allein in ein Glied gebracht werden muß).

$10a - 100 = 200.$

Es fragt sich, wem a, diesem angenommenen Grundsatze gemäß, gleich sey?

Man wird finden, daß $a = \frac{200 + 100}{10}$ oder gleich $20 + 10$.

Auflösung. a ist von 10a der 10te Theil, folglich ist es auch gleich dem 10ten Theil vom 2ten Glied, nach dem die 100 negativ in dasselbe gesetzt worden, und man erhält folgende Formel $a = \frac{200 + 100}{10}$ oder $a = 20 + 10$.

Folglich ist die unbekannte Größe gleich der bekannten dividirt mit der Anzahl der unbekannten. 11ter Satz.

$\frac{a}{2} + 10 = 100.$

Wem ist a gleich, ohne daß etwas von a in dem andern dern Glied sey?

Man wird finden: $a = 200 - 20$.

Denn $\frac{a}{2}$ ist gleich $100 - 10$ nach dem 8ten Satz. — Will man ein ganzes a haben, so muß man das halbe a, 2 mal nehmen, dadurch hat man das erste Glied doppelt genommen,

folglich muß man das 2te auch doppelt nehmen, und man erhält nach dem 4ten Satz 200 — 20.

Auf eine andere Art aufgelöset.

Man kann die 10 bei dem $\frac{a}{2}$ lassen, und das $\frac{a}{2}$ doppelt nehmen, wodurch 1 Theil des 1ten Gliedes verdoppelt worden ist, folglich muß der andere Theil des 1ten Glieds oder 10, wie auch das 2te verdoppelt werden, welches $a + 20 = 200$ giebt. Will man a allein haben, so müssen die 20 ins 2te Glied gesetzt werden, welches 200 — 20 giebt.

$$\frac{a}{3} + 20 = 100 - 4.$$

Es fragt sich, wem a gleich sey? Zuerst wird wieder der Bruch (3tel) weggeschafft, und man bekommt $a + 60 = 300 - 12$.

$$a = 300 - 12 - 60$$

$$\frac{4\,a}{7} + 10 - 4 = 100.$$

Fr. Wem ist a gleich?

Antw. $4\,a + 70 - 28 = 700.$

$$4\,a = 700 - 70 + 28$$

$$a = \frac{700 - 70 + 28}{4}$$

Auf eine andere Art aufgelöset.

Um von $\frac{4\,a}{7}$ a zu bekommen, muß man $\frac{4\,a}{7}$ 1 und ¾ mal nehmen, folglich muß alles andere in beiden Gliedern 1 ¾ mal genommen werden, welches $a + 17\,½ - 7 = 175$ giebt.

Um den Bruch einer unbekannten Größe wegzuschaffen, muß also jede andere Größe mit ihrem Nenner multiplizirt werden. 12ter Satz.

So wie man hier immer nur 1 ganzes a suchte, so kann man auch 1 und mehrere Theile, wie auch mehrere mal das a selbst suchen. Hier folgen ein Paar Beispiele darüber.

$\frac{3\,a}{4} - 10 = 100.$ Wem ist $\frac{2\,a}{3}$ gleich?

Um dieses zu lösen, sieht man nach, was für ein Theil oder was für Theile $\frac{2\,a}{3}$ von $\frac{3\,a}{4}$ seyen, und nimmt die gleichen Theile der Glieder der Gleichung.

$$\frac{a}{9} - 100 = 200.$$

Wem werden 10 a gleich seyn?

Hier sieht man nach, wie viel mal so groß 10 a sey als $\frac{a}{9}$; und so oft dieses ist, müssen auch die andern Theile der Glieder wiederholt oder multiplizirt werden.

Die letztern Aufgaben sind unwichtig.

Statt daß die unbekannte Größe hier immer positiv war, kann sie auch negativ seyn

$$-\frac{a}{10} + 100 = 40.$$

Wem wird a allein gleich seyn?

Um dieses wieder zu lösen, thut man den Bruch weg, wodurch a negativ, 10 mal so groß negativ wird, als es war, folglich muß auch das ihm Gleiche 10 mal so groß gemacht werden, welches $- a + 1000 = 400$ giebt; also $- a = 400 - 1000.$

Auch kann man fragen, wem hier a positiv gleich sey?

Um dieses wieder zu lösen, ohne a ins andere Glied zu bringen, sieht man zuerst nach, wem weniger a allein gleich sey, und versetzt hernach a ins andere Glied, wodurch man Nichts = 400 — 1000 + a bekommt; thut man 400 — 1000 ins erste Glied, so erhält man nach dem 8ten und 9ten Satz — 400 + 1000 = a.

Folglich muß man, um eine unbekannte Zahl, die negativ ist, positiv zu machen, sie ins andere Glied versetzen. 13ter Satz.

Ferner ist das Negative einer unbekannten Zahl so vielem Negativem gleich, als sie, positiv, Positivem gleich ist. 14ter Satz.

Bisher kam die unbekannte Größe nur in einem Gliede, und zwar nur einmal vor, eben so kann sie in beiden Gliedern, und mehrere mal vorkommen ꝛc.

$$a + 100 + 10\,a = 200.$$

Wem wird a allein gleich seyn, ohne daß a auf die andere Seite kommt.

$$a = \frac{200 - 100.}{11.}$$

$$20\,a - 3\,a + 600 = 1000.$$

Wem ist a wieder allein gleich, ohne daß a im 2ten Glied vorkommt?

$a = \frac{1000 = 600}{17}$; denn die 3 a negativ heben von den 20 a positiv 3 auf, und es bleiben noch 17 a ꝛc.

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + 100 = 600.$$

Wem wird a allein gleich seyn?

Hier thut man zuerst den Bruch von $\frac{a}{2}$ weg, wodurch man dieses a, 2 mal so groß macht, folglich muß auch alles im 1ten und 2ten Glied 2 mal so groß gemacht werden, welches $a + \frac{2\,a}{3} + 200 = 1200$ giebt; thut man das 3 beim 2ten a weg, so macht man dieses 3 mal so groß, als es war, folglich muß auch alles 3 mal so groß gemacht werden, welches $3\,a + 2\,a + 600 = 3600$ giebt ꝛc.

Hier folgen noch ein Paar Aufgaben über dieses Verhältniß.

$$\frac{a}{4} + \frac{3\,a}{7} + 100 = 200.$$

$$a + \frac{12\,a}{7} + 400 = 800.$$

$$7\,a + 12\,a + 2800 = 5600.$$

$$19\,a = 5600 - 2800.$$

$$a = \frac{5600 - 2800.}{19}$$

$$\frac{4\,a}{5} - \frac{2\,a}{3} + 100 = 800.$$

$$4\,a - \frac{10\,a}{3} + 1000 = 4000.$$

$$12\,a - 10\,a + 3000 = 12000.$$

$$a = \frac{12000 - 3000}{12.}$$

Aufgaben, wo die unbekannte Zahl in beiden Gliedern ist.

$$\frac{a}{2} + 100 = 3\ a.$$

Wem wird a allein gleich seyn?

Um dieses zu lösen, thut man nach dem 12ten Satz den Bruch weg, wodurch man a + 200 = 6 a bekommt. Um a positiv in einem Glied zu erhalten, setzt man a des ersten Glieds in das 2te, wodurch man 200 = 6 a — a bekommt oder $\frac{200}{5} = a.$

Hat man also in 2 Gliedern positive unbekannte Größen, und sollen sie positiv in eins gebracht werden, so muß man sie in dasjenige versetzen, in welchem mehr positive sind, und umgekehrt, wenn man sie negatv haben will. 15ter Satz.

$$- 10\ a + 100 = 10 - \frac{a}{2}.$$

Wem wird a positiv, und wem wird es negativ allein gleich seyn?

Auch hier kann man die Schüler den Grundsatz des allgemeinen Verfahrens wieder wie oben aussprechen lassen; desgleichen mit den positiven und negativen vereiniget, wie aus folgender Aufgabe zu sehen ist.

$$4\tfrac{1}{2}\ a + 100 - 20 = - 12\ a + 1000.$$

Wem wird a positiv? und hernach negativ allein gleich seyn?

Verfahrungsart des 1ten Falls.

$$4\tfrac{1}{2}\ a + 100 - 20 + 12\ a = 1000$$
$$4\tfrac{1}{2}\ a + 12\ a = 1000 - 100 + 20.$$
$$16\tfrac{1}{2}\ a = 1000 - 100 + 20.$$

a ist $\frac{2}{33}$ von 16 ½ a, folglich ist es auch gleich $\frac{2}{33}$ von 1000 — 100 + 20, welches gleich $\frac{2000 - 200 + 40}{33}$ ist.

Auf eine andere Art ausgedrückt.

$$16\frac{1}{2}\ a = \frac{33\ a}{2} \text{ und } \frac{33\ a}{2} = 1000 - 100 + 20.$$

Die fernere Auflösung wird wie bei einer Gleichung mit einem einfachen Bruch gemacht.

Auflösung des 2ten Falls.

$$4\frac{1}{2}\ a + 100 - 20 + 12\ a = 1000$$
$$100 - 20 = -12\ a + 1000 - 4\frac{1}{2}\ a$$
$$100 - 20 - 1000 = -12\ a - 4\frac{1}{2}\ a$$
$$100 - 20 - 1000 = -16\frac{1}{2}\ a.$$

Die fernere Auflösung ist wie oben.

Als Uebung kann man ihnen noch Aufgaben geben, in denen mehrere Brüche der unbekannten Größe vorkommen, um sie besonders zur allgemeinen Regel des Verfahrens dieser verschiedenartigen Brüche zu führen, welches aber nichts neues mehr darbietet.

Kann das Kind eine unbekannte Zahl oder Größe leicht in allen Verbindungen nach diesen Gesetzen allein in ein Glied bringen, ohne daß es von dieser Größe etwas ins andere Glied bringt, so wird diese Gleichheitsformel auf eine unbekannte Größe oder Zahl angewandt, die unter allen möglichen Formen zu bekannten ausgedrückt ist. — Es können daher alle Aufgaben, die rein beim Kopfrechnen ohne alle Formen gelöset würden, durch diese oben entwickelte Formen aufgelöset werden. —

§. 6.

Eine unbekannte Zahl unorganisch bildend ausgedrückt und durch die eben entwickelte algebraische Formel gelöset.

Fr. Eine unbekannte Zahl mehr 10 ist gleich der Hälfte der Zahl mehr 30. Es fragt sich, welches diese Zahl sey?

Um dieses durch die algebraische Form auszudrücken und zu lösen, nimmt man für die unbekannte Zahl a an, folglich bekommt man nach der Angabe $a + 10 = \frac{a}{2} + 30$. Die weitere Auflösung geht immer so fort, wie bei der Formel, in der man a allein suchte, — wodurch man für a positiv 60 — 20 bekommt oder 40, für a negativ 20 — 60 oder 40 negativ; folglich ist die Zahl positiv im 2ten Fall auch 40.

Bei allen ähnlichen Formeln kann man sehen, wem die unbekannte Zahl negativ oder positiv gleich sey.

Fr. Wenn man von einer Zahl 100 wegthut, so erhält man 7/8 der Zahl negativ, mehr 12 negative. Es fragt sich, welches diese Zahl sey?

Für die unbekannte Zahl nimmt man wieder a an, folglich bekommt man nach der Angabe $a - 100 = - \frac{7a}{8} - 12$.

Um diese Aufgabe zu lösen, schafft man nach dem 12ten Satz den Bruch weg, und bringt die unbekannte Zahl entweder positiv oder negativ allein in Ein Glied, ohne die Gleichheit zu ändern, und dividirt nach dem 10ten Satz.

(Hier sollte man im 2ten Glied statt — 12, + — 12 setzen, welches aber doch nicht nothwendig ist, und leicht zu Verwirrungen Anlaß geben kann.)

Aus diesen zwei einzigen Aufgaben wird man sehen, wie alle Aufgaben, die im Kopfrechnen durch den 2ten §. gemacht worden sind, durch die algebraische Form gelöset werden können.

§. 7.

Eine unbekannte Zahl organisch bildend ausgedrückt und durch die algebraische Formel gelöset.

(Hier werde ich nicht mehr streng auf die Reinerhaltung jeder selbstständigen Ansicht Rücksicht nehmen).

Fr. Eine unbekannte Zahl mit 3 ¾ multiplizirt + 364 ½, giebt 20 mal die Zahl, weniger 10. Es fragt sich, welches diese Zahl sey?

Für die unbekannte Zahl nimmt man a an, diese mit 3 ¾ multiplizirt = 3 ¾ a ꝛc.

Fr. Eine Zahl mit ⅞ multiplizirt, mehr dem Produkt mit 3 ⅓ multiplizirt, giebt 100 mal die Zahl, weniger 100 ꝛc.

Die unbekannte Zahl, mit ⅞ multiplizirt, giebt, wenn man für diese Zahl a annimmt $\frac{7\,a}{8}$, wird diese mit 3 ⅓ multiplizirt, so giebt es 3 ⅓ mal $\frac{7\,a}{8}$ ꝛc.

Fr. Eine unbekannte Zahl mit ¾ dividirt, giebt die Zahl mit ⅓ multiplizirt, mehr 200 ꝛc.

Auflösung des Ansatzes.

Eine unbekannte Zahl mit ¾ dividirt, giebt 1 ⅓ mal die Zahl; denn ¾ sind im Ganzen 1 ⅓ mal enthalten; folglich bekommt man

$$\frac{4\,a}{3} = \frac{a}{3} + 200.$$

Auch hier kann man die Kinder wieder die allgemeine Regeln, nach denen die multiplizirende und dividirende unbekannte Zahl gesetzt werden muß, aufsuchen lassen, welches gewiß leicht geschehen wird, wenn man das algebraische Kopfrechnen versteht.

Statt der unbekannten Zahl kann auch die bekannte multiplizirt und dividirt werden; z. E. 1000 ist mit einer unbekannten Zahl multiplizirt worden, wodurch 364 entstanden ist; es fragt sich nun, welches diese Zahl sey?

Um dieses wieder unter die algebraische Formel zu bringen, kann man 1000 nur durch die unbekannte Zahl multipliziren, wodurch man 1000 a erhält, welches nach der Angabe gleich 364 ist.

Fr. 3648, mit einer unbekannten Zahl dividirt, giebt 300; welches ist diese Zahl?

Die algebraische Formel hiebei ist aus obigen Gründen

$$\frac{3648}{a} = 300.$$

Soll der Nenner wieder weggebracht werden, so macht man das 1te Glied um a mal größer, folglich muß das 2te auch um a mal größer gemacht werden. Würde man angeben: 3648, durch die unbekannte Zahl dividirt, ist gleich 300, mehr der Zahl, so würde dieses durch die Formel a mal a + 300 a = 3648 aufgelöset werden müssen, welches

eine Aufgabe der 2ten Potenz würde, die hier noch übergangen werden muß.

Fr. Wie oft muß man zu 3648, 2 hinzusetzen, während man zu 6400, ½ setzt, bis beide einander gleich werden? —

Zu beiden muß dieses gleich oft geschehen, wie oft ist aber unbekannt, welches ich deswegen a nenne. Während ich nun zur ersten 2 oder 2 a setze, darf ich zur 2ten nur $\frac{a}{2}$ setzen, und damit sollen die 6400 nach der Angabe gleich werden 3648 + 2 a; folglich erhält man als Gleichung $6400 + \frac{a}{2} = 3648 + 2\,a.$

Die Auflösung davon geht wieder nach der bekannten algebraischen Formel fort.

Das Nämliche auf eine andere Art in die algebraische Formel gebracht.

Die 1te bekannte Zahl ist 3648, und die 2te 6400; thut man das, was die 2te mehr ist als die 1te weg, (welches 2752 ist) so muß das, was man zur kleinern mehr thut, diesem Unterschied gleich werden; zur kleinern thut man 2, während man zur größern ½ setzt; folglich macht 1 ½ die unbekannte Zahl oder 1 ½ a gleich 2752 — doch ist die 1te Formel leichter und allgemein anwendbarer; von den Kindern wird gewiß die 1te allgemeiner gefunden.

Es folgen noch ein Paar Aufgaben, durch die 1te Formel angesetzt.

Fr. Wie oft muß man zu 2460, 2 hinzuthun, während man von 10000, 3 ¾ wegthut, bis beide einander gleich werden?

Die Formel dieser Angabe ist: $2460 + 2a = 10000 - 3\frac{3}{4}a$, denn zu 2460 thut man so oft 2 hinzu, als man $3\frac{3}{4}$ von 10000 wegthut. Für das Wie oft wird wieder a angenommen; folglich bekommt man $2460 + 2a$ ꝛc.

Fr. Wie oft muß man zu 1000, 2 hinzu thun, während man von 3400, 7 ½ wegthut, bis beide einander gleich werden?

Formel. $1000 + 2a = 3400 - 7\frac{1}{2}a$; oder $\frac{15a}{2}$

Aus diesen einzelnen Aufgaben wird man wieder sehen, daß alles, was beim Kopfrechnen rein ohne Formeln gemacht wurde, hier ganz leicht durch die algebraische Formeln gemacht werden kann. —

§. 8.

Eine unbekannte Zahl unorganisch vergleichend ausgedrückt und durch die algebraische Formel gelöset.

Fr. Wenn eine unbekannte Zahl um 100 mehr wäre als sie wirklich ist, so wäre sie gleich der Hälfte der Zahl mehr 2484 ꝛc.

Die algebraische Formel ist: $a + 100 = \frac{a}{2} + 2484$; denn wenn sie um 100 mehr wäre als sie ist, so wäre sie gleich der Hälfte mehr 2484; wird für die unbekannte Zahl a angenommen, so bekommt man durch die Angabe $a + 100 = \frac{a}{2}$ ꝛc.

Fr. Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 2484 ist gleich 7000. Es fragt sich, was dieses für eine Zahl sey?

Um den Unterschied zwischen 2 Zahlen auszudrücken, wird das Kind durch das Kopfrechnen schon wissen, daß es die kleinere Zahl von der größern abziehen muß; oder um den Unterschied negativ zu bekommen, muß man die größere von der kleinern wegthun ꝛc.

In dieser Aufgabe ist die unbekannte Zahl die größere; denn wenn die bekannte Zahl die größere wäre, so müßte der Unterschied kleiner seyn als 2484, — welches nicht seyn kann, ohne daß die eine negativ wäre, welches in dieser Aufgabe, wie in allen andern Fällen, in welchen es nicht bestimmt anders angegeben wird, positiv genommen werden muß. Ich weiß daher, daß die unbekannte Zahl oder a die größere ist; folglich bekomme ich zum Ansatz $a - 2484 = 7000$ und $a = 7000 + 2484$ oder 9484.

Fr. Der Unterschied zwischen 2 ⅘ mal einer unbekannten negativen Zahl und 7840 ist 20000: Welches ist diese Zahl?

Um diese Aufgabe wieder zu lösen, sieht man zuerst nach, was der Unterschied zwischen 2 ⅘ mal der bekannten negativen Zahl und 7840 sey, und man wird finden, daß von 2 ⅘ mal der unbekannten Zahl negativ, bis auf Nichts 2 ⅘ mal diese Zahl oder a sey; von Nichts bis auf 7840 hat es noch 7840; folglich ist der Unterschied von 2 ⅘ a negativ und 7840 = 2 ⅘ a mehr 7840, und zum Ansatz erhält man $2\frac{4}{5}a + 7840 = 20000$ ꝛc.

Um den Unterschied zwischen dem Negativen und Positiven einer Zahl auszudrücken, muß man die negative Zahl positiv setzen, und beide Zahlen positiv für den Unterschied nehmen.

Fr. Der Unterschied zwischen dem 10 fachen einer unbekannten negativen Zahl und 2484 ist um 3 ⅘ mal diese Zahl größer als 4000. Es fragt sich, welches diese Zahl sey?

Auflösung des Ansatzes.

Der Unterschied zwischen 10 a negativ und 2484 ist 10 a und 2484. Dieses ist aber nach der Angabe um 3 ⅘ a größer als 4000; folglich muß man 3 ⅘ a, von 10 a und 2484 wegthun, wodurch man $10\ a + 2484 - 3\tfrac{4}{5}\ a = 4000$ erhält; eben so könnte man zu den 4000 dieses, was sie kleiner ist als das 1te Glied, hinzusetzen, und man würde $10\ a + 2484 = 4000 + 3\tfrac{4}{5}\ a$ erhalten.

Fr. Der Unterschied zwischen dem 10fachen einer unbekannten Zahl und 4978, ist um 100 mehr oder weniger als das 30fache dieser Zahl. Es fragt sich, welches diese Zahl sey?

Daß hier die bekannte Zahl die größere ist, ist das erste, welches gezeigt werden muß; daß keine negativ seyn darf, ist schon bemerkt worden.

4978 — 10 a ist also der Unterschied, und dieser Unterschied ist 100 mehr als 30 a; folglich muß, um die Gleichheit zu erhalten, 100 im 1ten Glied weggethan werden, wodurch man folgende Formel erhält.

$4978 - 10\ a - 100 = 30\ a$ rc.

Fr. Wenn das 20fache einer unbekannten Zahl um 100 mehr wäre als es ist, so wäre es 44 mal der Unterschied zwischen der Zahl und 1. Es fragt sich, welches diese Zahl sey?

Für die unbekannte Zahl nimmt man a an, das 20fache wird also 20 a. Die Bedingung ist: wenn dieses um 100

mehr wäre, so wäre es gleich 44 mal dem Unterschied zwischen der Zahl und 1; 1 ist kleiner als die unbekannte Zahl; denn wenn 1 die größere wäre, so bekäme man für 44 mal den Unterschied nicht einmal 44; folglich erhält man als Formel:

$20\,a + 100 = 44\,a - 44$ ꝛc.

Der §. des Theilens fällt wieder als unwichtig, wie beim Kopfrechnen weg; dafür wird er bei 2 unbekannten Zahlen oder Größen wichtiger.

§. 9.

Eine unbekannte Zahl organisch vergleichend ausgedrückt und durch die algebraische Formel gelöset.

Fr. Eine unbekannte Zahl ist 4 und ¾ mal so groß als 100. Es fragt sich: was dieses für eine Zahl sey?

Wenn die unbekannte Zahl 4 und ¾ mal so groß als 100 ist, so wird diese unbekannte Zahl durch 4 und ¾ dividirt oder getheilt gleich 100 oder $\frac{a}{4\frac{3}{4}} = 100$ oder $a = 475$ ꝛc.

Fr. 7840, ist 4½ mal so groß als welche Zahl?

Hier ist die bekannte Zahl 4½ mal so groß als die unbekannte; folglich wird aus obigem Grund $\frac{7840}{4\frac{1}{2}} = a$ oder $4\frac{1}{2}\,a = 7840$.

Die Halben weggethan $9\,a = 15680$ ꝛc.

Fr. Die Hälfte einer unbekannten Zahl + 10000 ist 21 mal so groß als die unbekannte Zahl. Es fragt sich: welches diese Zahl sey?

$\frac{a}{2} + 10000$ ist nach der Angabe 21 mal so groß als a; folglich ist der 21te Theil von $\frac{a}{2} + 10000$ gleich a, oder $\frac{\frac{a}{2} + 10000}{21} = a$, oder noch einfacher ausgedrückt $\frac{a}{2} + 10000$ ist 21 mal so groß als die unbekannte Zahl a; welches man auch folgendermaßen aufstellen kann:

$\frac{a}{2} + 10000 = 21\ a$. Im 1ten Ansatz hat das 1te Glied einen doppelten Bruch, thut man 21 weg, und dividirt das erste Glied nicht damit, so wird dieses 21 mal so groß als es war ꝛc. Wenn man den 2ten Bruch wegschafft, so wird a doppelt so groß als es war; folglich kann man allgemein sagen: daß dasjenige beim doppelten Bruch doppelt statt finde, was beim einfachen einfach wahr ist.

Desgleichen findet mit dem 3 und 4fachen Bruch des Multiplizirens und Dividirens ꝛc. statt, welches gewiß jeder nach Bedürfniß im Stand seyn wird weiter auszuführen. —

Fr. Wie oft muß man zu 1244, 1 hinzusetzen, während man zu Nichts 10 setzt, bis die 2te 2 mal so groß wird als die 1te?

Auflösung des Ansatzes.

Zu 1244 setzt man 1 mal die unbekannte Zahl, während man sie zu Nichts 10fach setzt; in beiden Gliedern muß dieses gleich oft geschehen, welches ich a heiße, folglich bekommt man für 10 a, 2 mal so viel, als für 1244 + a oder $\frac{10\ a}{2} = 1244 + a$ oder wenn 10 a doppelt so groß sind als 1244 + a, so ist 2 mal 1244 + a auch gleich 10 a.

Die fernere Auflösung geht wie die algebraischen Formeln.

Weil alle Aufgaben dieser Art sich auf die nämliche Art ansetzen und lösen lassen, so folgen als Beispiel nur noch ein Paar Ansätze.

Fr. 1) Wie oft muß man zu 2484, 2 ⅓ hinzuthun, während man zu 10000, 1 setzt, bis die 1te ⅔ der 2ten wird? 2) Wie oft muß man dieses zur 1ten hinzu, und von der 2ten wegthun, bis die 1te 10 mal so groß wird als die 2te? 3) Wie oft muß man 2 ⅓ von der 1ten, und 1 von der 2ten wegthun, bis die 1te $\frac{1}{100}$ der 2ten wird?

1te Aufg. $2484 + 2\frac{1}{3}\,a = 2$ mal dem 3ten Theil von $10000 + a$ oder $6666 \frac{+ 2\,a.}{3}$

2te Aufg. $2484 + 2\frac{1}{3}\,a = 10$ mal $10000 - a$ oder $100000 - 10\,a.$

3te Aufg. $2484 - 2\frac{1}{3}\,a = \frac{10000 - a}{100.}$

Wie hier die unbekannte Zahl negativ und positiv war, so kann es auch noch die bekannte seyn. Hier folgt ein Beispiel.

Fr. Wie oft muß man zu 10000 negativ 4 setzen, während man von 2486, 3 ⅓ wegthut, bis die 1te ¾ der 2ten wird.

$- 10000 + 4\,a = \frac{3}{4}$ von $2486 - 3\frac{1}{3}\,a.$ Dieses kann auch auf folgende Art ausgedrückt werden.

$10000 - 4\,a = (2486 - 3\frac{1}{3}\,a) \times \frac{3}{4}$, welches in Zukunft auch als Abkürzungszeichen gebraucht wird.

Daß bei ähnlichen Aufgaben sehr leicht Zahlen angegeben werden können, die nicht gehen und nicht gehen können,

ist leicht zu begreifen; die algebraische Formel zeigt dieses auf eine sehr einfache Art.

Hat man mit dem Kinde eine unbekannte Zahl auf diese Art durchgeführt, so wird es sehr zweckmäßig seyn, wenn man ihm eine Formel auf die Tafel schreibt, und dasselbe alle Fragen, die in der Formel enthalten sind, ausdrücken läßt. So wird es finden, daß die Formel $a + 100 = 3a$ heißen könne: wenn eine unbekannte Zahl um 100 mehr wäre als sie wirklich ist, so wäre sie gleich dem 3fachen dieser Zahl; oder wie oft muß man zu 100, 1 setzen, während man zu Nichts 3 setzt, bis beide Zahlen einander gleich werden?

Aus diesen Paar Aufgaben wird man sehen, welche Schätze von Wahrheiten in jeder algebraischen Formel liegen, wenn man sie in ihrem ganzen Umfang versteht. Besonders reichhaltig sind diejenigen Formeln, die dividirend und multiplizirend ausgedrückt sind, und wobei die unbekannte Zahl in beiden Gliedern vorkommt. Die weitere Ausführung wird keinen Schwierigkeiten mehr unterworfen seyn.

§. 10.

Eine unbekannte Zahl durch die Verbindung mehrerer §§. ausgedrückt und in eine algebraische Formel gebracht.

(Das Anzeigen des §., aus dem diese oder jene Aufgabe zusammengesetzt ist, wird hier nicht mehr nöthig.)

Fr. Wie oft muß man zu 1000, 2 setzen, bis es gleich wird der unbekannten Zahl mit $\frac{1}{10}$ dividirt, weniger 400?

Auflösung des Ansatzes.

Die unbekannte Zahl mit $\frac{1}{10}$ dividirt, giebt das 10fache dieser unbekannten Zahl; folglich bekommt man $1000 + 2\ a = 10\ a - 400$.

Fr. Wie oft muß man zu 2460, $4\frac{2}{3}$ thun, während man zu 7000, 3 hinzusetzt, bis die 1te um 100 mehr wird als die 2te?

$2460 + 4\frac{2}{3}\ a$ ist nach der Angabe um 100 mehr als $7000 + 3\ a$.

Um dieses gleich zu machen, muß man die 100 zur 2ten hinzu oder von der 1ten wegthun, wodurch man folgende Ansätze erhält:

$2460 + 4\frac{2}{3}\ a - 100 = 7000 + 3\ a$. oder
$2460 + 4\frac{2}{3}\ a = 7000 + 3\ a + 100$.

Fr. Wie oft muß man zu 2400 negativ $10\frac{2}{3}$ setzen, während man von 8000, $2\frac{9}{10}$ wegthut, bis die 2te um 340 weniger wird als die 1te?

$- 2400 + 10\frac{2}{3}\ a = 8000 - 2\frac{9}{10}\ a + 340$.

Denn das 2te Glied ist um 340 weniger als das 1te; folglich um wieder gleiches zu erhalten, muß man dieses zum 2ten hinzusetzen, oder vom 1ten wegthun rc.

Fr. Wie oft muß man zu 1000, 3 setzen, bis dieses gleich wird dem Unterschied zwischen 400 negativ und dem 4fachen dieser unbekannten Zahl?

Die Formel davon ist:

$1000 + 3\ a = 400 + 4\ a$.

Denn der Unterschied zwischen einer negativen und positiven Zahl macht so viel als beide Zahlen rc.

Fr. Wie oft muß man zu 2400, 3 hinzusetzen, während man zu 1000, 10 setzt, bis die 2te um 100 mehr als 2 mal so groß wird als die 1te?

$$2400 + 3\,a = \frac{1000 + 10\,a - 100.}{2}$$

Im 2ten Glied muß 1000 + 10 a, 2 mal so groß seyn, als das 1te mehr 100, thut man die 100 davon weg, so muß dann der Rest gerade 2 mal so groß seyn oder $\frac{1000 + 10\,a}{2}$ mit dem weniger 100 gleich dem 1ten Glied ꝛc.

Fr. Wie oft muß man zu 2000 negativ 7 thun, während man von 8000, 4 ¼ abzieht, bis die 1te um 700 weniger wird als 9/10 der 2ten?

$$\frac{-\,2000 + 7\,a + 700}{9} = \frac{8000 + 4\tfrac{1}{4}\,a.}{10}$$

Denn zum 1ten Glied muß man noch 700 thun, bis es wirklich 9/10 des 2ten wird, wenn das 1te Glied 9/10 des 2ten ist, so hat das 1te 9 Theile, wie das 2te 10; folglich muß der 9te Theil von ihm, gleich dem 10ten Theil des 2ten werden, oder das 1te getheilt oder dividirt durch 9, gleich dem 2ten dividirt durch 10 ꝛc.

Wie diese einzelnen Aufgaben behandelt worden sind, können alle Aufgaben einer unbekannten Zahl behandelt werden, welches als Leitfaden für den Eindringenden hinlänglich seyn mag, für den andern ist dieses schon zu viel, er muß wieder weiter vornen anfangen — und besonders das algebraische Kopfrechnen noch mehr üben, indem einem solchen die hinlängliche Schlußkraft noch mangelt.

So wie bisher eine unbekannte Zahl mit 1, und mehreren bekannten Zahlen unter eine algebraische Formel ge-

bracht worden ist, können auch 2 unbekannte Zahlen unter diese Formel gebracht werden. —

Die unorganische und organische Bildung von 2 unbekannten Zahlen geht eben so, wie die Bildung einer unbekannten Zahl mit mehreren bekannten, und hat, nachdem man den 2ten und 3ten §. des schriftlich algebraischen Rechnen aufgefaßt hat, nicht viel Neues mehr, deswegen wird diese Ansicht ganz übergangen, und erst bei der Vergleichung angefangen, welches auch mehr Wichtiges und Neues hat. — Doch wer die Bildung mit 2 und mehreren unbekannten Zahlen durchgeführt haben will, wird dieselbe nach der Formel von einer unbekannten, und nach der Art und Weise, wie die Vergleichung jetzt von 2 unbekannten gemacht wird, sehr leicht machen können.

Kommen in einer Gleichung 2 und mehrere unbekannte Zahlen vor, so müssen dieselbe auf eben die Art behandelt werden, wie eine unbekannte mit mehreren bekannten. —

Als Beispiel folgen hier einige Aufgaben.

$a + b + 100 = 1000$. Wem wird a allein gleich seyn?

Wenn b und 100 aus dem 1ten Glied weggethan werden, so muß von dem 2ten eben so viel abgezogen werden, und man erhält $a = 1000 - b - 100$.

Desgleichen findet statt, wenn eine einen Bruch giebt, der aus 2 unbekannten Zahlen gebildet ist. —

$\frac{a}{b} + 100 = 1000$. Wem wird a allein gleich seyn?

Um dieses wieder zu lösen, schafft man den Bruch weg; wenn man von a, b wegthut, so macht man a, b mal größer; folglich muß man die andern Theile des 1ten Glieds,

wie auch die des 2ten ebenfalls b mal größer machen, welches 100 b und 1000 b giebt; folglich erhält man $a + 100 b = 1000 b$ oder $a = 1000 b - 100 b$.

Auch können die beiden unbekannten Zahlen mehrmal in der Gleichung vorkommen; die Zahlen aber, die anzeigen, wie oft sie genommen wurden, müssen bekannt seyn; z. B.

$$24 a + 34 b = 100 + \frac{b}{3}$$

Dann wird eine unbekannte Zahl, die in beiden Gliedern der Gleichung vorkommt, auf die nämliche Art in ein Glied gebracht, wie dieses bei einer unbekannten mit bekannten geschehen ist.

Z. B. bei $24 a + 34 b = 100 + \frac{b}{3}$ wird zuerst der Bruch 3 weggeschafft, wodurch $\frac{b}{3}$, 3 mal so groß wird, als es war; folglich müssen auch alle andere Glieder der Gleichung 3 mal so groß gemacht werden; man erhält dadurch $72 a + 102 b = 300 + b$; will man b positiv bekommen, so thut man sie wieder auf die Seite der größern Anzahl positiver b, welches hier $72 a + 102 b - b = 300$ giebt, bei b allein, muß 72 a aus dem 1ten Glied weg ins 2te gethan werden, welches $102 b - b = 300 - 72 a$ macht. $102 b - b = 101 b$; folglich $b = \frac{300 - 72 a}{101}$; aus diesem einzigen Beispiel wird man einsehen, daß dieses ganz wieder so fort geht, wie bei einer unbekannten Zahl, die mit bekannten verglichen würde.

Aufgaben wie folgende müssen noch vermieden werden.

$ab + ab = 100$. Wem wird a allein gleich seyn, ohne daß ein a im andern Glied ist?

$ab + a + 100 = 20\,b$. Wem wird a allein gleich seyn? oder wem wird b allein gleich seyn, ohne daß der Buchstabe, den man sucht, im andern Glied der Gleichung noch vorkomme? überhaupt muß hier eine unbekannte Zahl eine bekannte mal genommen werden. —

Kommen 2 unbekannte Zahlen oder Größen in 2 Gleichungen auf die 1te Art zum Vorschein, so kann man sie wieder behandeln, wie eine unbekannte Zahl, oder Größe in einem Glied; zu dieser Verfahrungsart können die 15 aufgestellten Sätze einer Gleichung als Leitfaden dienen. Hier werden einige Beispiele folgen:

1) $24\,a + b = 100 - a$

2) $30\,a + b = 200$.

Will man a in der 1ten Gleichung nur in einem Glied haben, so muß das negative a des 2ten Glieds ins 1te gethan werden, und das positive b des 1ten ins 2te; wodurch man $25\,a = 100 - b$ erhält, und für $a = \frac{100 - b}{25}$.

In der 2ten Gleichung wird

$30\,a = 200 + b$ oder

$a = \frac{200 + b}{30}$.

Auf diese Art kann man sehen, wem b allein in jeder Gleichung oder wem b in der einen und a in der andern Gleichung gleich sey; das Letzte ist jedoch nicht sehr wichtig.

Nach dem 1ten Satz ist angenommen, daß der gleiche Buchstabe immer die gleiche Größe oder Zahl bezeichne.

Wenn $a + b + 100 = 4000$, und hernach $7\,a - 9\,b - 100 = 4\,b - 400$ macht, so kann man sehen,

wem die 1ste oder 2te unbekannte Zahl oder Größe in jedem Glied gleich sey; ich nehme hier die 1te oder a, und sehe, wem diese in der 1ten und 2ten Gleichung allein gleich sey, und finde nach der Behandlung einer Gleichung, daß a der 1ten Gleichung = 4000 — b — 100.

2te Gleichung $a = \frac{4\,b - 400 + 9\,b + 100.}{7.}$

In der 1ten Gleichung ist a = 4000 — b rc., und in der 2ten ist die nämliche Größe $= \frac{4\,b - 400}{7}$ rc., weil nun a gleich a ist, so ist das 2te Glied der 1ten Gleichung auch gleich dem 2ten Glied der 2ten Gleichung, oder 4000 $- b - 100 = \frac{4\,b - 400 + 9\,b + 100.}{7}$

Hier hat man wieder eine Gleichung, und auch nur eine unbekannte Zahl oder Größe, und diese wird weiter eben so aufgelöset und behandelt, wie vorhin eine unbekannte Zahl in einer Gleichung; zuerst wird der Bruch weggeschafft, hernach die unbekannte Zahl positiv allein auf ein Seite gegebracht rc.

Um also bei 2 unbekannten Zahlen in 2 Gleichungen eine wegzuschaffen, sieht man, wem die 1te oder 2te unbekannte Zahl in jeder Gleichung allein gleich sey, und macht dann aus den diesen Größen gleichen Gliedern eine 3te Gleichung. 16ter Satz.

So wie dem Kind diese Formel deutlich ist, kann man sie dieselbe wieder auf 2 unbekannte Zahlen eben so anwenden lassen, wie es bei einer unbekannten Zahl geschah.

§. 11.

Zwei unbekannte Zahlen unorganisch bildend ausgedrückt, und durch die algebraische Formel gelöset.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, die 1te mehr die 2te machen 2000. 2 mal die 1te mehr 3 ¾ mal die zweite machen 5000. Es fragt sich, welches diese Zahlen seyen?

(Für die 1te unbekannte Zahl werde ich immer den 1ten und für die 2te den 2ten Buchstaben annehmen).

Für die 1te mehr die 2te unbekannte Zahl bekomme ich als 1te Gleichung $a + b = 2000$, und für die 2te Gleichung bekommt man $2a + 3\frac{3}{4}b = 5000$; folglich vermöge der 1ten Gleichung $a = 2000 - 1b$. und vermöge der 2ten Gleichung $a = \frac{5000 - 3\frac{3}{4}b}{2}$; und also

$$2000 - 1b = \frac{5000 - 3\frac{3}{4}b.}{2.}$$

Um b positiv zu bekommen, muß der Bruch weggeschafft, hernach die b oder die unbekannte Zahl wieder wie bei einer Gleichung allein in ein Glied gebracht werden, dadurch erhält man $b = 571\frac{3}{7}$; folglich ist die 2te unbekannte Zahl 571 3/7. Um die 1te zu finden, kann man nur die 1te oder 2te Gleichung ansehen. In der 1ten heißt es: die 1te unbekannte Zahl mehr 1mal die 2te machen 2000; die 2te ist 571 3/7; folglich kann man sagen $a + 571\frac{3}{7} = 2000$; die fernere Auflösung geht dann ganz wie bei einer Gleichung.

Auch kann die 2te unbekannte Zahl, die jetzt bekannt ist, in die 2te Gleichung gesetzt werden, wodurch man $2a + 2142\frac{6}{7} = 5000$ erhält; in beiden Gleichungen wird man für a die gleiche Zahl finden; für den kräftigen Schüler ist

dieses nicht einmal mehr nöthig, er sieht und sagt es beim 1ten Anblick, eben so stehen eine Menge Abkürzungen in seiner Gewalt, deren Aufsuchung und Anwendung ich einem jeden überlassen will. —

Fr. Man denkt 2 Zahlen, 3 ¾ mal die 1te, und 4 mal die 2te machen 600; 7 ¾ mal die 1te, weniger 10 mal die 2te machen Nichts. Es fragt sich: welches diese Zahlen seyen?

Für die 1te Gleichung bekommt man

$3\frac{3}{4}\ a + 4\ b = 600.$

2te Gleichung $\frac{31\ a}{4} - 10\ b =$ //

(Die Nulle kann nicht wohl, wie schon bemerkt, als Bezeichnung gebraucht werden).

Um diese Aufgabe wieder zu lösen, sieht man, wem a oder b allein in jeder Gleichung gleich sey, läßt dann diesen Buchstaben oder Zahl wieder weg, und verfährt wieder ganz wie bei obiger Aufgabe.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon 10 mal die 1te weniger 13 mal die 2te, 1 mal die 1te beträgt und 100; 4 mal die 1te und 5 mal die 2te hingegen machen 900. Es fragt sich: welches diese Zahlen seyen?

1te Gleichung $10\ a - 13\ b = a + 100.$

2te Gleichung $4\ a + 5\ b = 900.$

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon 4 mal die 1te weniger 20 mal die 2te Nichts machen, 9 mal die 1te weniger 60 ½ mal die 2te machen 1000 negativ. Es fragt sich: welches diese Zahlen seyen?

1te Gleichung $4\ a - 20\ b = ,,$

2te Gleichung $9\ a - 60\frac{1}{2}\ b = -1000.$

Aus diesen wenigen Aufgaben wird man wieder sehen, wie alle auf diese Art ausgedrückte Aufgaben durch eine und dieselbe Formel gelöset werden können.

Man kann auch Aufgaben geben, bei denen die negative und positive Zahl unbestimmt ist.

Fr. Man denkt 2 Zahlen; die 1te mehr die 2te machen weniger 20, oder 20 negativ; 10 mal die 1te positiv und 3 mal die 2te machen 640. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

Antw. Die 1te 120 negativ, und die 2te 100 positiv.

1te Gleichung $a + b = -20.$

2te Gleichung $3\ a + 10\ b = 640.$

$$1\text{te}\ a = -20 - b.$$

$$2\text{te}\ a = \frac{640 - 10\ b}{3};$$

folglich $\frac{640 - 10\ b}{3} = 20 - b.$

Den Bruch weggethan, giebt

$640 - 10\ b = -60 - 3\ b.$

Die 10 b ins 2te Glied gebracht, giebt

$640 = -60 - 3\ b + 10\ b$

$640 + 60 = -3\ b + 10\ b.$

$700 = 7\ b$

$\frac{700}{7} = b$ oder für b 100; a mehr b machen weniger 20 oder $a + 100 = 20$; oder a allein $= -20$; mehr

100 negativ oder mit Zeichen ausgedrückt $a = -20 + (-100)$ oder 120 negativ. Das Zeichen mehr bleibt doch in diesen Fällen gewöhnlich weg.

Auf eine andere Art ausgedrückt.

$- a + b = - 20$

$- 3 a + 10 b = 640.$

In der 1ten Gleichung wird

$b = - 20 + a.$

2) $b = \frac{640 + 3 a}{10}$; folglich $- 20 + a$

$= \frac{640 + 3 a}{10}$

$- 200 + 10 a = 640 + 3 a$

$- 200 + 10 a - 3 a = 640$

$7 a = 640 + 120$

$a = 840$ oder 120; folglich ist a negativ $=$ 120 negativ ꝛc.

Hier kann man aber mit Recht fragen: Warum man gerade a für negativ genommen habe?

Beim Anschauen der 1ten Gleichung sieht man, daß die 1te und 2te Zahl gleich viel mal genommen 20 negativ machen; folglich muß die negative Zahl um 20 mehr seyn als die positive.

In der 2ten Gleichung wird die 2te Zahl mehr mal genommen, wäre diese negativ, so müßte mehr als 20 negativ entstehen, welches nicht geschehen ist, indem 640 positiv herauskommt; folglich ist a die negative Zahl.

Auch läßt sich der erste Ansatz dieser Aufgabe rechtfertigen, wo $a + b = -20$ als noch unbestimmt angesehen wird, indem man noch nicht weiß, ob a oder b negativ oder positiv

sey. Wirklich muß dieser Ansatz als solcher betrachtet werden, der erst durch die 2te Gleichung bestimmt wird; dann heißt aber $a + b = - 20$ eine positive Zahl, mehr eine andere, die negativ ist, aber positiv gesetzt wird, und durch die 2te Gleichung bestimmt wird, ist gleich -20.

Noch ließe sich fragen: warum die 2te Gleichnng dieses bestimme? dieses kann aber nur durch die 2te Auflösung erklärt werden.

Um aber diesem schwer zu begreifenden Ansatz und dem feinen Vernunftschluß im Erkennen der Zahl im 2ten Ansatz auszuweichen, können immer 2 Auflösungen gemacht werden, worauf das Kind auch zuerst fallen wird, nämlich eine, in der die 1te Zahl, und eine, in der die 2te als negativ betrachtet wird; nimmt man die unrechte als negativ an, so wird etwas Unmögliches herauskommen, wie aus folgenden 2 Ansätzen und Auflösungen zu sehen ist.

1te. $a - b = - 20.$
2te. $3a + 10b = 640.$

I. $a = -20 + b$

II. $a = \frac{640 - 10b}{3}$

also

$$-20 + b = \frac{640 - 10b}{3}$$

$$-60 + 3b = 640 - 10b$$

$$+ 3b + 10b = 640 + 60$$

$$13b = 700$$

$$b = \frac{700}{13}$$

2te Auflösung. 1te. $- a + b = - 20$

2te. $- 3 a + 10 b = 640.$

$\text{I.}\ b = - 20 + a$

$\text{II.}\ b = \frac{640 + 3 a}{10}$

also

$$\frac{640 + 3 a}{10} = - 20 + a$$

$$640 + 3 a = - 200 - 10 a$$

$$10 a + 3 a = - 200 - 640$$

$13 a = - 840$; folglich wäre 13 mal eine positive Zahl gleich 840 negativ, welches nicht seyn kann; folglich ist die Annahme, daß a negativ sey, falsch.

Hätte man den 2ten Ansatz zuerst gemacht, so würde der 1te nothwendig gewesen seyn; bei der umgekehrten Annahme fällt aber dieses weg. —

Durch diese Formel können alle Aufgaben dieser Art leicht gelöset werden; folglich können 2 unbekannte Zahlen, wovon eine negativ und die andere positiv ist, allgemein durch 2 Ansätze gelöset werden, oder man kann sie durch einen machen, dann muß aber die negative angegeben oder durch einen Vernunftschluß zuerst bestimmt werden.

Noch folgen ein Paar Aufgaben auf eine andere Art ausgedrückt.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te mehr 2 mal die 2te 400 betragen; thut man von der 1ten 20 weg, und zur 2ten hinzu, so werden beide einander gleich. Es fragt sich, was dieses für 2 Zahlen seyen?

$\text{I.}\ a + 2 b = 400.$

$\text{II.}\ a - 20 = b + 20.$

I. $a = 400 - 2\,b$
II. $a = b + 20 + 20$; also
$400 - 2b = b + 40$
$400 - 40 = b + 2\,b$
$360 = 3\,b$
$\frac{360}{3} = b$ welches 120 macht.

Der Ansatz und Auflösung ist wie oben. — Schwerer werden dergleichen Aufgaben auch hier wieder, wenn man eine negative und positive Zahl angiebt, ohne in der Angabe zu bestimmen, welches die positive oder negative sey. Ist die negative oder positive bestimmt, so ist der Ansatz und die Auflösung gleich den positiven Größen.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, die eine ist negativ und die andere positiv, 2 mal die 1te und 6 mal die 2te machen 400, thut man von 2 mal der 2ten 400 weg, und zur 1ten hinzu, so erhält man gleiches. Es fragt sich, welches diese Zahlen seyen?

I. $2\,a + 6\,b = 4000$
II. $2\,b - 400 = a + 400$.

Würden diese Zahlen beide positiv seyn, so wäre dieser Ansatz richtig, nun ist ist aber angegeben, daß eine negativ und die andere positiv sey; folglich muß die Aufgabe durch den doppelten Ansatz gelöset werden, wie bei einer negativen und positiven Größe gezeigt wurde.

§. 12.

Zwei unbekannte Zahlen organisch bildend ausgedrückt und durch die algebraische Formel gelöset.

Fr. 100 mit einer unbekannten Zahl multiplizirt, und 1000 mit einer andern, giebt 20.

4 mal die 1te und 100 mal die 2te machen 1. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

I. $100\ a + 1000\ b = 20.$

II. $4\ a + 100\ b = 1.$

Die Auflösung dieser und ähnlichen Aufgaben ist ganz gleich den vorhergehenden. Desgleichen kann gemacht werden, wenn 2 bekannte Zahlen mit 2 unbekannten dividirt werden. Z. B.

I. $\frac{100}{a} + \frac{300}{b} = 40.$

II. $3\ a + 100\ b = 8$ rc.

Beim Dividiren und Multipliziren kommt man hier leicht in die 2te Potenz, welche hier noch nicht folgen darf.

Alle andere Aufgaben dieses §. werden gewiß ohne alle Schwierigkeit gegeben und gelöset werden können. Als Leitfaden will ich noch ein Paar geben, in denen besonders das negative Verhältniß vorkommt.

Fr. Eine unbekannte Zahl weniger 10, mit 3 negativ multiplizirt, mehr die 2te unbekannte Zahl, machen 11 mal die 1te; 4 mal die 1te und 3 mal die 2te sind 400. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

$$\begin{array}{r} a - 10 \\ \times - 3 \\ \hline \end{array}$$

1) $- 3\ a + 30 + b = 11\ a$

2) $4\ a + 3\ b = 400.$

Die Auflösung dieser Formel geht wieder ganz so, wie die des vorhergehenden §. und anderer Aufgaben.

Fr. Wie viel betragen die 2 Zahlen, wovon die 1te negativ, und die 2te positiv ist; die 1te mehr 100, mit 10

negativ multiplizirt, mehr die 2te machen 4000; thut man von der 2ten Zahl 300 weg und zur 1ten negativ hinzu, so werden beide Zahlen einander gleich.

$$\begin{array}{r} -a + 100 \\ \times \quad -\ 10 \\ \hline \end{array}$$

1) $10a - 1000 + b = 4000.$
2) $-a + 300 = b - 300.$

Hier wurde immer nur eine Gleichung durch die organische Bildung ausgedrückt, daß diese auch in beiden Gleichungen vorkommen kann, soll nicht mehr nöthig seyn zu bemerken.

Dividirt können auf eben diese Art Aufgaben gemacht werden, welche aber nicht sehr wichtig, und zugleich ziemlich schwer zu lösen sind.

§. 13.

Zwei unbekannte Zahlen unorganisch vergleichend ausgedrückt und durch die algebraische Formel gelöset.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te um 1 mehr ist als die 2te, beide sind gleich 1000. Es fragt sich, was dieses für 2 Zahlen seyen?

I. $a - 1 = b$
II. $a + b = 1000.$

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te um 30 weniger ist als die 2te, 3 mal die 1te, mehr die 2te $= 6000$. Es fragt sich, welches diese Zahlen seyen?

Um die 1te Zahl gleich der 2ten zu machen, muß man 30 zu ihr hinzusetzen, wodurch man für die 1te Gleichung

I. $a + 30 = b$.
II. $3\,a + b = 6000$ ꝛc.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon 2 mal die 1te, um 300 weniger ist als 5 mal die 2te; 7 mal die Summe von beiden beträgt 4000. Es fragt sich, welches diese Zahlen seyen?

I. $2\,a + 300 = 5\,b$.
II. $7\,a + 7\,b = 4000$.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon der Unterschied zwischen der 1ten und 2ten 340 macht; beide sind 6000. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

Um den Unterschied zwischen 2 Zahlen auszudrücken, muß die kleinere von der größern weggethan werden; hier ist es gleich, welche Zahl als die größere angenommen werde, indem jede unbekannte Zahl, in beiden Gleichungen nur 1 mal vorkommt; ich nehme zuerst die 2te für die größere.

1) $b - a = 340$
2) $b + a = 6000$.

Giebt man aber mehr mal die 1te oder 2te Zahl an, so ändert sich dieses. Z. E. Wenn der Unterschied zwischen einer 1ten und einer 2ten Zahl 400 ist, und 6½ mal die 1te, mehr 4 mal die 2te 6000 machen, wie viel wird dann jede seyn?

1) $a - b = 400$.
2) $6\frac{1}{2}\,a + 4\,b = 6000$.

Hier ist a als die größere angenommen; nimmt man b als die größere an, so erhält man

1) $b - a = 400$
2) $4\,b + 6\tfrac{1}{2}\,a - 6000.$

Statt die Aufgabe so unbestimmt zu geben, kann man sie auch bestimmt angeben, welches interessanter und wichtiger ist.

Fr. Der Unterschied zwischen 2 Zahlen, wovon die 1te die größere ist, beträgt 300; 4 ½ mal die 1te, weniger 6 mal die 2te machen Nichts oder weniger als Nichts, und zwar diese oder jene bekannte oder unbekannte Zahl; ich will hier 1 negativ annehmen.

1) $a - b = 300.$
2) $4\tfrac{1}{2}\,a - 6\,b = -1.$

Auch kann hier wieder eine Wiederholung des Unterschieds statt finden; wie leicht aus den Uebungen des Kopfrechnens zu sehen ist; als Anleitung folgen noch einige Aufgaben.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te die kleinere ist; 10 ½ mal der Unterschied der 1ten zur 2ten, weniger die größere, machen 7 mal die kleinere; 2 mal die größere, und 8 mal der Unterschied machen zusammen 6000. Es fragt sich: welches diese Zahlen seyen?

1) $-10\tfrac{1}{2}\,a + 10\tfrac{1}{2}\,b - b = 7\,a$
2) $2\,b + 8\,b - 8\,a = 6000.$

Um den Unterschied zwischen 2 Zahlen auszudrücken, muß man die kleinere von der größern wegthun, um ihn 10 ½ mal zu bezeichnen oder auszudrücken, muß man 10 ½ mal die kleinere von der größern wegthun, wodurch man $10\tfrac{1}{2}\,b - 10\tfrac{1}{2}\,a$ erhält, aus dem gleichen Grund muß man in der 2ten Gleichung $8\,b - 8\,a$ setzen. →

Wie man bei einer unbekannten Zahl den Unterschied zwischen einer negativen und positiven Zahl ausdrückte, so kann dieses auch hier geschehen. —

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te negativ und die 2te positiv ist; 2 mal der Unterschied zwischen der ersten und 2ten mehr die 2te betragen 20 mal die 2te, 8 mal die erste und 80 mal die 2te machen 600. Es fragt sich: was dieses für Zahlen seyn?

1) $2a + 2b + b = 20b$; denn der Unterschied zwischen einer negativen und positiven Zahl, ist die negative mehr die positive, oder $a + b$, und 2 mal dieser Unterschied machen $2a + 2b$ ꝛc.

2) $-8a + 80b = 600$; denn a ist nach der Angabe eine negative Zahl. Wird hier nicht bestimmt, welche Zahl positiv oder negativ sey; so muß wieder ein doppelter Ansatz gemacht werden.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die eine negativ und die andere positiv ist; 2mal der Unterschied zwischen diesen beiden Zahlen beträgt 800, 3 mal die erste, und 5 mal die 2te machen 1200. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

1) $2a + 2b = 800$.
2) $3a + 5b = 1200$.

Hat man die unrechte Zahl als negativ angenommen, so wird man etwas unmöglich finden; folglich muß denn die andere als negativ betrachtet werden, durch welches sich folgender Ansatz ergiebt.

1) $2a + 2b = 800$
$-3a + 5b = 1200$.

Warum man in der ersten Gleichung bei jedem Ansatz $2a + 2b$ setzte, soll man aus den vorhergehenden Aufgaben schon hinlänglich wissen.

Wie beim Kopfrechnen der Unterschied mit der kleinern, größern und mit beiden vereinigt oder mit der Summe verglichen worden ist, so kann dieses auch hier geschehen. Noch ein Paar Aufgaben im Allgemeinen.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon der Unterschied um 10 mehr ist als die kleinere; 4 ½ mal die Summe von beiden beträgt 4000, welches werden diese Zahlen seyn?

Hier ist es gleich, welche als die größere angenommen wird, weil in der 2ten Gleichung die große so oft genommen wird als die kleinere; wäre dieses nicht, so würde es wieder 2 verschiedene Zahlen geben, die diesem entsprächen; ich nehme an, die erste sey die größere; folglich bekomme ich als Ansatz:

$$a - b - 10 = b$$
$$4\tfrac{1}{2}\,a + 4\tfrac{1}{2}\,b = 4000.$$

Fr. Der Unterschied zwischen 2 Zahlen soll um 100 weniger seyn als die kleinere, 4 mal die 1te und 5 ½ mal die 2te betragen 4000. Was sind es für Zahlen?

Für diese Aufgabe giebt es wieder 2 Antworten, in denen man die erste oder 2te als die größere annehmen kann; hier folgt der Ansatz, in der die erste die kleinere ist.

1) $b - a + 100 = a$
2) $4a + 5\tfrac{1}{2}\,b = 4000.$

Ansatz, in dem die 2te die kleinere ist.

1) $a - b + 100 = b$
2) $4a + 5\tfrac{1}{2}\,b = 4000.$

Diese Aufgabe auf folgende Art ausgedrückt, giebt nur eine Antwort: Der Unterschied zwischen 2 Zahlen ist um 100 weniger als die kleinere, 4 mal die kleinere und 5 ½ mal die größere machen 4000? Der Ansatz davon ist:

1) $a - b + 100 = b$
2) $4\,b + 5\frac{1}{2}\,a = 4000.$

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die größere gleich ist 4 ¾ mal dem Unterschied zwischen dieser größern und kleinern; die größere negativ mehr 21 mal die kleinere, ist gleich dem Unterschied mehr 1000. Es fragt sich: was dieses für Zahlen sind?

1) $a = 4\frac{3}{4}\,a - 4\frac{3}{4}\,b$
2) $-a + 21\,b = a - b + 1000.$

Fr. 10 mal der Unterschied zwischen 2 positiven Zahlen, negativ genommen, ist gleich 4 mal der größern negativ mehr 100 positiv; 3 mal die größere weniger 2 mal die kleinere machen 400. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

1) $-10\,a + 10\,b = -4\,a + 100.$
2) $3\,a - 2\,b = 400.$

Um den Unterschied zwischen 2 positiven Zahlen negativ auszudrücken, muß man die größere von der kleinern wegthun, welches in obigem Ansatz geschehen ist, indem a als größere angenommen wurde.

Hätte man in dieser Aufgabe nicht angegeben, welches die größere wäre, so würde es wieder 2 Zahlen geben, die diesen Verhältnissen entsprechen würden.

Fr. Wie viel machen die 2 Zahlen, wovon die erste positiv und die 2te negativ ist, wenn der positive Unterschied zwischen diesen beiden Zahlen um 1000 weniger wäre als

3 mal der positive Unterschied dieser beiden Zahlen; wäre die positive um 200 mehr als sie wirklich ist, so wäre 4 mal die positive und 4 mal die negative 1200?

$$1)\quad a + b + 1000 = 3\,a + 3\,b$$
$$2)\quad (a + 200 - b)\,4 = 1200.$$

Hier wird a als positiv angenommen; um den Unterschied zwischen einer negativen und positiven Zahl zu bekommen, muß man die negative Zahl positiv machen; folglich bekommt man a + b; nun ist dieses aber um 1000 kleiner als 3 mal der Unterschied; folglich muß 1000 hinzugesetzt werden, und man bekommt a + b + 1000 = 3 a + 3 b ꝛc.

Wie man hier den Unterschied zwischen einer negativen und positiven Zahl positiv ausdrückt, so kann er auch negativ ausgedrückt werden. Auch könnte man die positive und negative Zahl als unbestimmt angeben, wodurch wieder eine Aufgabe entstehen würde, die 2 Antworten hätte. —

§. 14.

Zwei unbekannte Zahlen durch das Theilen ausgedrückt, und unter eine algebraische Formel gebracht.

Weil das Theilen an und für sich selber betrachtet nicht selbstständig ist, so werden auch die Aufgaben, die in dieser Ansicht gegeben werden, unwichtig, oder besser gesagt, es lassen sich keine Aufgaben machen, ohne die Verbindung dieses §. mit andern; besonders wichtig werden sie mit der Verbindung in der Vergleichung, und zwar mit der unorganischen und organischen Vergleichung. Ich werde aber die §., aus denen diese oder jene Aufgaben gebildet werden, nicht mehr anzeigen.

Fr. Man soll 2000 so in 2 Theile theilen, daß 4 mal der 1te und 5 mal der 2te Theil gleich werden 7 mal dem ersten Theil. Es fragt sich: welches diese Theile werden?

Die erste Gleichung muß hier immer aus dem Verhältniß der 2 Theile zum Ganzen, und die 2te aus dem Verhältnisse des einen Theils zum andern gemacht werden.

1) $a + b = 2000.$
2) $4\ a + 5\ b = 7\ a.$

Als erste Gleichung bekommt man, daß die beiden Theile a und b die Zahl 2000 ausmachen; in der 2ten ist das Verhältniß des ersten Theils zum 2ten ausgedrückt worden. —

Fr. Man soll 4000 so in 2 Theile theilen, daß der 1te 4 ½ mal genommen weniger der 2te, gleich wird 5 mal dem 2ten + 100. Welches sind die Theile?

1) $a + b = 4000.$
2) $4\frac{1}{2}\ a - b = 5\ b + 100.$

Fr. Man soll 7000 so in 2 Theile theilen, daß der 1te Theil mit 100 multiplizirt, gleich wird 3 mal dem 2ten, durch 10 dividirt.

1) $a + b = 7000$
2) $100\ a = \frac{3\ b}{10.}$

Drückt man eine Vergleichung durch die organische Bildung aus, so kommt man auch hier wieder leicht in die 2te Potenz, welches aber noch nicht folgen soll. Z. E. Man soll 1000 so in 2 Theile theilen, daß der 1te mit dem 2ten multiplizirt 100 gebe; welches sind die Theile?

Fr. Man soll 4000 so in 2 Theile theilen, daß der eine um 40 mehr wird als der andere; was sind es für Theile?

1) $a + b = 4000$
2) $a - 40 = b$.

Fr. Man soll 300 so in 2 Theile theilen, daß der 1te um 900 weniger wird als der 2te; wie groß wird jeder Theil?

Daß hier wieder ein Theil negativ ist, ist leicht einzusehein; folglich müssen wieder allgemein 2 Ansätze gemacht werden, um diesen negativen Theil zu finden. Ich nehme an, b sey der negative Theil; folglich bekomme ich

$a - b = 300$
$a + 900 = - b$.

Daß man hier die falsche Zahl als negativ angenommen hat, erfolgt aus der 2ten Gleichung, indem es heißt $a + 900 = - b$; mithin muß a der negative Theil seyn, und man bekommt:

1) $- a + b = 300$
2) $- a + 900 = b$.

1) $- a = 300 - b$
2) $- a = b - 900$.

Weniger a ist gleich weniger a; folglich bekommt man für die neue Gleichung $300 - b = b - 900$; und für b, 600, für a negativ also 300 negativ.

Fr. Man soll 4000 so in 2 Theile theilen, daß der Unterschied des 1ten Theils zum 2ten gleich wird dem 1ten. Es fragt sich: was diese 2 Theile werden?

1) $a + b = 4000$
2) $- a + b = a$,

Fr. Man soll diese 4000 so theilen, daß der Unterschied des 1ten zum 2ten um 100 mehr wird als der 1te Theil, oder um 100 weniger als der 2te rc.?

Ansatz der ersten Aufgabe:

1) $a + b = 4000$
2) $b - a - 100 = a.$

Ansatz der 2ten:

1) $b + a = 4000$
2) $b - a + 100 = a.$

Auch hier könnte leicht wieder der Fall eintreten, daß es 2 Resultate gäbe; wenn nämlich die bekannte 100 in der 2ten Gleichung ein größerer Theil von der Summe 4000 wäre rc., oder wenn mehrere mal ein unbekannter Theil angegeben würde. —

Fr. Man soll 5000 so in 2 Theile theilen, daß der Unterschied zwischen dem 1ten und 2ten Theil 5 mal genommen gleich wird dem 1ten Theil. Was sind es für Theile?

Hier giebt es wieder 2 Resultate, die diesem entsprechen; denn man kann die 1te oder 2te als die größere annehmen; die erste für die größere angenommen giebt folgenden Ansatz;

1) $a + b = 5000$
2) $5 a - 5 b = a.$

Die 2te für die größere angenommen giebt:

1) $a + b = 5000$
2) $- 5 a + 5 b = a.$

Giebt man bei dieser Angabe an, welches der größere Theil sey, so hat es auch wieder nur eine Antwort. —

§. 15.

Zwei unbekannte Zahlen durch die organische Vergleichung ausgedrückt, und durch die algebraische Formel gelöset.

Fr. 2 Zahlen, wovon eine 3 mal so groß ist als die andere, betragen mit einander 4000. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

1) $a + b = 4000$

2) $\frac{a}{3} = b$

Die beiden Zahlen betragen nach der Aufgabe 4000; folglich kann man wieder sagen $a + b = 4000$; nun ist die eine 3 mal so groß als die andere; ich nehme an, es sey a; folglich ist der 3te Theil von ihr, oder $\frac{a}{3} = b$ oder der 2ten Zahl. Daß es hier gleich ist, welche Zahl man als 3 mal so groß annehme, soll keine Schwierigkeit mehr haben. —

Fr. Wieviel machen die 2 Zahlen, wovon die 1te 3¾ mal so groß ist als die 2te, und deren Summe 800 beträgt?

1) $\frac{a}{3\frac{3}{4}} = b$

2) $a + b = 800.$

Fr. Wieviel betragen die 2 Zahlen, wovon der Unterschied zwischen ihnen 2 mal so groß ist, als die 1te, wenn ihre Summe 8000 macht?

1) $a + b = 8000$

2) $\frac{b - a}{2} = a.$

Der Ausdruck Unterschied gehört eigentlich in die unorganische Vergleichung; dieses genaue Trennen ist aber hier nicht mehr nöthig; ich gebe noch einige Aufgaben im Allgemeinen, und lasse das Bestimmen der §§. einem jeden über.

Fr. Wieviel wird ein Theil werden, wenn man 4000 so in 2 Theile theilt, daß der erste 3 mal so groß wird als der 2te?

Fr. Wieviel wird jeder Theil werden, wenn der 1te 3 ½ mal so groß wird als der 2te weniger aber 200?

Fr. Wieviel werden sie werden, wenn der 1te 4 ¾ mal so groß wird als der 2te mehr 300?

1te Aufgabe.

1) $a + b = 4000$

2) $\frac{a}{3} = b.$

2te Aufgabe.

1) $a + b = 4000$

2) $\frac{a + 200}{3\,\frac{1}{2}} = b$

3te Aufgabe.

1) $a + b = 4000$

2) $\frac{a - 300}{4\,\frac{3}{4}.} = b$

Auflösung des 2ten Ansatzes. Beide Theile sind nach der Angabe 4000; folglich bekommt man für eine Gleichung $a + b = 4000$.

Ferner ist angegeben, daß der 1te 3 ½ mal so groß ist als der 2te, weniger aber 200; also müssen noch 200 hinzu-

gesetzt werden, bis er 3 ½ mal so groß wird als der 2te; also erhält man, nachdem 200 hinzugesetzt worden sind, und dieser Theil mehr 200 durch 3 ½ dividirt ist, den 2ten Theil oder b.

Wenn man diese 2 Formeln so weit aufgelöset hat, daß man die 1te oder 2te unbekannte Zahl allein in einer Gleichung findet, so kommt für a, 3066 ⅔ und für b, 933 ⅓.

Probe.

Sind diese 2 Zahlen richtig, so muß die 1te oder a, wenn sie um 200 mehr wäre als sie ist oder 3266 ⅔, 3 ½ mal so groß seyn als b; soll die 1te Zahl 3 ½ mal so groß seyn als die 2te, so müssen $\frac{2}{7}$ von ihr gleich seyn der 2ten, der 7te Theil von 3266 ⅔ = 466 ⅔, und 2 mal dieses machen 2 mal 466 ⅔ = 933 ⅓; also ist die 2te Gleichung richtig. Für die erste Gleichung müssen die 2 Theile 3066 ⅔ und 933 ⅓ = 4000 machen, welches ebenfalls statt findet.

Wie auf diese Art die Probe von jeder Aufgabe gemacht werden kann, ist für den, der in die Sache dringt, hinlänglich deutlich; auch ist es zweckmäßig, wenn die Probe von Zeit zu Zeit gemacht wird.

Fr. Wieviel betragen die 2 Zahlen, wovon die 1te 4 mal so groß ist als die 2te, und deren 30 maliger Unterschied weniger die größere 1000 beträgt?

1) $\frac{a}{4} = b$

2) $30\,a - 30\,b - a = 1000.$

Mit dem Negativen und Positiven kann wieder das Nämliche vorgenommen werden. —

Fr. Wieviel betragen die 2 Zahlen, wovon die 1te die größere ist, und deren 4 maliger Unterschied 10 mal so groß

ist als die kleinere; wenn die 1te mit 2 multiplizirt und die 2te mit 3 dividirt 1000 macht?

$$1)\ \frac{4\,a - 4\,b}{10} = b$$

$$2)\ 2\,a + \frac{b}{3} = 1000.$$

Fr. Thut man von einer Zahl 20 weg und zu einer 2ten hinzu, so wird die 2te $\frac{1}{10}$ von der 1ten; thut man aber von der 2ten 100 weg und zur 1ten hinzu, so wird die 2te $\frac{3}{40}$ der 1ten. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

$$1)\ \frac{a - 20}{10} = b + 20$$

$$2)\ \frac{a + 100}{40} = \frac{b - 100.}{3}$$

Wenn man zur 2ten 20 setzt, und von der 1ten wegthut, so wird die 2te $\frac{1}{10}$ der 1ten, also hat die 2te 1 Theil wie die 1te deren 10 hat; folglich der 10te Theil von der 1ten gleich der 2ten mehr 20; aus dem nämlichen Grunde ist der 40te Theil der 1ten auch gleich dem 3ten Theil der 2ten, in der 2ten Gleichung.

Fr. Man denkt 2 Zahlen; wenn man von der ersten 100 weg und zur 2ten hinzusetzt, so wird die 2te 10 ½ mal so groß als die 1te; thut man aber von der 2ten 1000 weg und zur 1ten hinzu, so wird die 2te ⅓ der ersten. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen sind?

$$1)\ a - 100 = \frac{b + 100}{10\,\frac{1}{2}}$$

$$2)\ \frac{a + 1000}{3} = b - 1000.$$

Fr. Wenn man von einer Zahl 100 weg und zur 2ten hinzuthut, so wird die 2te 3mal so groß als die 1te weniger aber 10; thut man aber von der 2ten 900 weg und zur 1ten hinzu, so wird die 2te ⅓ der ersten, weniger 40. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

$$1)\quad a - 100 = \frac{b + 100 + 10}{3}$$

$$2)\quad \frac{a + 900}{3} = b - 900 + 40.$$

Fr. Wieviel machen die 2 Zahlen, wovon die kleinere $\frac{3}{20}$ von der Summe beider + 1000 macht, wenn der Unterschied 600 beträgt?

$$1)\quad a = (a + b + 1000)\ (\times\ \tfrac{3}{20})$$
$$2)\quad b - a = 600.$$

Um dieses zu lösen, wird das 2te Glied der 1ten Gleichung mit $\frac{3}{20}$ multiplizirt; denn 3 Theile davon wie das Ganze 20 hat, sind gleich dem ersten Glied; folglich bekommt man $a = \frac{3\ a + 3\ b + 3000}{20.}$

Wenn man hier nicht angiebt, ob es die kleinere oder größere Zahl sey, so giebt es wieder 2 Zahlen, die diesem entsprechen, und besonders schwierig können solche Aufgaben werden, wenn man positive und negative Zahlen auf diese Art mit einander bestimmt, welches jedoch nicht mehr wichtig ist. Giebt man negative und positive Zahlen multiplizirend und dividirend an, so können ebenfalls noch sehr schwere Aufgaben gemacht werden, welches wieder unwichtig wird.

Drei unbekannte Zahlen haben die nämliche Behandlungsart, welche aber nicht mehr in diesem Umfang nöthig ist; ich werde deswegen nur einige der wichtigsten Regeln in den Formeln und Aufgaben aufstellen.

Um 3 unbekannte Zahlen zu bestimmen, werden 3 Gleichungen erfordert; giebt man 3 unbekannte Zahlen, und nur 2 Gleichungen, so sind sie unbestimmt, welches durchs Kopfrechnen deutlich seyn soll; ich werde auch ein Paar Aufgaben als Beispiel geben, indem die Verfahrungsart ganz gleich der 2 unbekannter Größen ist.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 1te, 2te und 3te 400 machen; 2 mal die erste, 3 mal die 2te und 4 mal die 3te machen 1300. Es fragt sich: was dieses für 3 Zahlen seyen?

1) $a + b + c = 400$
2) $2\ a + 3\ b + 4\ c = 1300.$

I. $a = 400 - b - c$

II. $a = \frac{1300 - 3\ b - 4\ c.}{2.}$

a der ersten Gleichung ist gleich $400 - b - c$, und das gleiche a der 2ten ist gleich $\frac{1300 - 3\ b - 4\ c}{2}$; folglich kann man auch hier sagen:

$$400 - b - c = \frac{1300 - 3\ b - 4\ c}{2}$$

oder $800 - 2\ b - 2\ c = 1300 - 3\ b - 4\ c.$

Hier kann man die unbekannte Größe b oder c allein in ein Glied bringen, ich wähle das 1te, und setze die — 3 b des 2ten Gliedes in das erste, wodurch ich $3\ b + 800 - 2\ b - 2\ c = 1300 - 4\ c$ erhalte: die andern Größen ins 2te Glied gesetzt, giebt $3\ b - 2\ b = 1300 - 4\ c - 800 + 2\ c. + b = 500 - 2\ c$; folglich ist b um 2 c kleiner als 500, oder 500 ist um 2 c mehr als b; für diese 2 c kann ein beliebiges abgezogen werden, doch aber weniger

als 500, indem sonst nichts mehr für b bleiben würde; sie sollen 440 betragen; folglich c allein 220, und b 60, also bleibt für a noch 120, denn $a + b + c = 400$.

Fr. Man soll 4000 so in 3 Theile theilen, daß 2 mal der 1te so viel wird als 3 mal der 2te und 4 mal der 3te. Es fragt sich: wie viel diese Theile werden?

1) $a + b + c = 4000$
2) $a = 3\,b + 4\,c$.

Die Auflösung davon ist wieder ganz gleich der vorhergehenden.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 1te negativ ist, und wenn sie positiv wäre, so würde sie halb so groß seyn als die 2te; alle 3 zusammen betragen 4000. Es fragt sich: welches diese 3 Zahlen seyen?

Aehnliche Ansätze sollen sicher und ohne alle Schwierigkeiten gemacht werden.

Wie man am Ende einer Gleichung dem Kinde eine gewisse algebraische Formel auf die Tafel vormachte, und es alle Aufgaben, die diese Formel ausdrückte, bestimmen ließ, so kann dieses auch hier wieder geschehen; als Leitfaden werde ich einige solcher Formeln folgen lassen.

Was drücken die 2 Formeln

1) $a + b = 2000$

2) $a = \frac{b}{3}$ aus?

Antw. Man soll 2000 so in 2 Theile theilen, daß der 2te 3 mal so groß wird als der 1te: oder man denkt 2 Zahlen, wovon die 2te 3 mal so groß als die erste, und wovon beide 2000 machen.

Dieses sind die wesentlichsten Ausdrücke dieser beiden Formeln:

1) $2\ a + 100 + b = 3000$

2) $3\ a = \frac{4\ b - 100}{2.}$

Die 1te dieser Gleichungen heißt: 2 mal eine unbekannte Zahl + 100, mehr eine 2te unbekannte machen 3000; die 2te Gleichung: 3 mal die 1te unbekannte Zahl ist halb so groß als 4 mal die 2te weniger 100, oder die 1te Gleichung heißt auch: Wenn das Doppelte einer unbekannten Zahl mehr eine 2te um 100 mehr wäre als sie wirklich sind, so wären sie 3000; ferner ist 4 mal die 2te weniger 100, 2 mal so groß als 3 mal die 1te; oder diese Gleichungen heißen auch: Die 1te von diesen beiden unbekannten Zahlen mit 2, und die 2te mit 1 multiplizirt mehr 100 giebt 3000. Ferner wird die 1te mit 3 multiplizirt gleich dem 4fachen der 2ten weniger 100, mit 2 dividirt.

1) $2\ a - 3\ b = 2000$

2) $3\ a + 200 = 100\ b.$

Die 1te dieser 2 Gleichungen kann heißen: 2 mal eine Zahl weniger 3 mal eine 2te machen 2000, und 3 mal die 1te + 200 machen 100 mal die 2te — oder 2 mal eine Zahl positiv mehr 3 mal eine 2te negativ machen 2000, und 3 mal die 1te mehr 200 machen 100 mal die 2te positiv; oder der Unterschied zwischen dem Doppelten einer Zahl und dem 3fachen einer andern (beide positiv) macht 2000, und hernach ist 3 mal die 1te + 200 so groß als 100 mal die 2te ꝛc.

Man wird aus folgendem §. sehen, daß 3 unbekannte Zahlen auch bei 3 Gleichungen auf die nämliche Art ausgedrückt werden können, wie 2 unbekannte Zahlen in 2 Gleichungen, welches aber viel unwichtiger ist. — Aus diesem

Grunde gehe ich gleich zu 3 unbekannten Zahlen, die durch 3 Verhältnisse oder Gleichungen ausgedrückt sind.

Die Art und Weise, wie 3 unbekannte Zahlen ausgedrückt werden, ist ganz ähnlich der von 2 unbekannten.

Ich begnüge mich deswegen mit einigen der wichtigsten Aufgaben; vor allem muß aber auch hier wieder die allgemeine algebraische Formel aufgestellt werden, unter der 3 unbekannte Zahlen oder Größen in 3 Gleichungen behandelt werden können. Dies weitläufig durchzuführen ist ganz überflüßig, indem die Hauptformel und Hauptregel eben so ist, we bei einer und 2 unbekannten Zahlen in 1 und 2 Gleichungen,

Hat man 3 Gleichungen, und in diesen 3 Gleichungen 3 unbekannte Zahlen oder Größen (in jeder Gleichung 3 oder in jeder nur 2, oder in einer 2 und in der andern 3), so sieht man wieder, wem die erste Größe in jeder Gleichung gleich sey? — Lasset dann diese Größe oder Zahl weg, und macht aus ihren Gleichen von 2 Gleichungen eine neue Gleichung, und sieht, wem die 2te Größe gleich werde, macht hernach aus der 3ten und 1ten oder 2ten eine 3te neue Gleichung, und sieht ebenfalls, wem die 2te Zahl in dieser neuen Gleichung gleich seye. Hier folgt als Leitfaden ein Beispiel; mehr bedarf es gewiß nicht.

1) $a + b = 100$
2) $2\,a + b = 140$
3) $4\,a + b + c = 500$

In der 1ten Gleichung wird a allein.

1) $a = 100 - b$

2) $a = \frac{140 - b}{2}$

3) $a = \frac{500 - b - c}{4}$

Aus der 1ten und 2ten Gleichung wird aus dem Werth von a eine neue Gleichung gemacht. —

$$\underbrace{100 - b}_{I} = \underbrace{\frac{140 - b}{2}}_{II}$$

$$200 - 2\,b = 140 - b$$

$$200 - 140 = b$$

oder $b = 60$. Hier weiß man schon aus dieser Gleichung, wem b allein, oder die 2te unbekannte Zahl gleich ist, deswegen fällt hier die weitere Auflösung der Formel weg. Hier folgen 3 Gleichungen, in denen man das angegebene Verfahren braucht. —

1) $a + b + c = 600.$
2) $3\,a + 6\,b = 5\,c.$
3) $2\,a + 3\,b + 4\,c = 2000.$

I. $a = 600 - b - c$

II. $a = \frac{5\,c - 6\,b}{3}$

III. $a = \frac{2000 - 3\,b - 4\,c}{2}$

Aus dem Werth von a, aus der 1ten und 2ten Gleichung, eine neue gemacht, giebt.

$$\underbrace{600 - b - c}_{I} = \underbrace{\frac{5\,c - 6\,b}{3}}_{II}$$ und für b allein bekommt man nach den Grundsätzen einer Gleichung

$$b = \frac{8\,c - 1800}{3}$$

Aus dem Werth von a, von der 1ten oder 2ten Gleichung mit dem von a aus der 3ten, giebt folgende neue Gleichung:

$$\underbrace{600 - b}_{\text{I}} - \underbrace{c}_{\text{III}} = \frac{2000 - 3\,b - 4\,c}{2}$$

für b allein bekommt man auf obige Weise $b = 800 - 2\,c$.

Macht man aus dem 1ten und 2ten Werth von b wieder eine neue Gleichung, so erhält man

$$\underbrace{\frac{8\,c - 1800}{3}}_{\text{I}} = \underbrace{800 - 2\,c}_{\text{II}};$$

für c allein bekommt man 300; hat man einmal c oder eine unbekannte, so verfährt man wie bei 2 Gleichungen, in denen eine unbekannte bestimmt ist. — Diese Ausführung wird für den, der das Vorhergehende verstanden hat, keine Schwierigkeiten mehr haben. —

Ehe ich zu den eigentlichen Aufgaben übergehe, muß ich noch einige Bemerkungen über die wichtigern und unwichtigern, über die leicht und schwer aufzulösenden Aufgaben machen.

Beim algebraischen Kopfrechnen hat man gesehen, daß 1, 2, 3 unbekannte Zahlen, oft leichter zu lösen sind, als nur eine einzige, wenn sie auf diese oder jene Art ausgedrückt ist. — Dieses findet besonders bei den algebraischen Formeln mit 2 und mehreren unbekannten Zahlen statt; — welches sehr auffallend bei den unbekannten Zahlen, die durch die Vergleichungen ausgedrückt sind, am allerauffallendsten aber bei der organischen Vergleichung ist.

Hier können oft 2, 3 und mehrere unbekannte Zahlen leichter durch e i n e, als durch 2, drei und mehrere algebraische Gleichungen gelöset werden. Als Beispiele folgen einige Aufgaben von 2, 3 und 4 unbekannten Größen oder Zahlen durch e i n e Gleichung gelöset.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 2te 2 mal so groß ist als die erste, und beide betragen 4000. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen? —

Für die 1te unbekannte Zahl nehme ich a an, für die 2te, weil sie 2 mal so groß ist, 2 a; folglich bekommt man für beide a und 2 a; diese beiden Zahlen sind 4000; folglich erhält man als Gleichung $\overbrace{a}^{I} + \overbrace{2\,a}^{II} = 4000$, und für a allein $= \frac{4000}{3}$ oder 1333 ⅓, die 1te Zahl hat nach der Angabe 1 a oder 1333 ⅓. Die 2te hat 2 solcher Theile oder 2666 ⅔.

Aehnliche Auflösungen haben mir die Kinder immer gemacht, wenn ich sie 2 unbekannte Zahlen lösen ließ, ohne daß ich die Behandlungsart von 2 und mehreren algebraischen Formeln vorausschickte.

Hier wird man mir aber einwenden, diese Auflösungen von 2 und mehreren unbekannten Zahlen rc. seyen nicht algebraisch; ich antworte aber, die Auflösungen seyen algebraisch, aber nicht für 2 unbekannte Zahlen in ihrem ganzen Umfange anwendbar. Die Gründe davon lassen sich leicht darthun; es würde mich aber zu weit in das Raisonnement führen; ich werde deßwegen gleich mit dem Wesen der Sache fortfahren.

Wenn man 2 unbekannte Zahlen durch eine Gleichung lösen will, so muß es auf obige künstliche Art geschehen; aber wie kann das Kind zuerst auf eine solche künstliche Art fallen, da es doch ganz Natur ist, und Natur bleiben soll, wenn es zweckmäßig geführt wird? Der Grund davon ist die Behandlungsart einer Gleichung, die es kennt, und deren Anwendung dieses auf 2 und mehrere unbekannte Zahlen, noth-

wendig hervorbringt, — will man dieses erfahren, so muß man das Kind, nachdem es eine unbekannte Zahl in einer Gleichung suchen kann, solche Aufgaben machen lassen, ohne daß es das Wesen der Formeln von 2 und mehreren unbekannten Zahlen kennt; in diesem Fall müssen aber ähnliche Aufgaben gegeben werden, denn andere sind ganz und gar unmöglich auf diese Art zu lösen. —

Hier folgen einige Aufgaben, die diese Eigenschaft deutlich machen.

Fr. Man soll 4000 so in 2 Theile theilen, daß der 2te 4 mal so groß wird als der 1te. Es fragt sich: was dieses für 2 Theile seyen?

$$\overbrace{a}^{1} + 4\,\overbrace{a}^{2} = 4000.$$

Die Auflösung davon ist ganz wie bei einer unbekannten Zahl. Nachdem man aber eine unbekannte Zahl hat, muß man dieselbe so oft nehmen, als jede a hat ꝛc.

Fr. Man soll 4000 so in 2 Theile theilen, daß der 2te 2 mal so groß wird als der 1te mehr 100. Es fragt sich: wieviel jeder werde? —

$$\overbrace{a}^{1} + (2\,\overbrace{a}^{2} + 100) = 4000$$

$$3\,a = 4000 - 100$$

$$a = \frac{3900}{3} \text{ oder } 1300.$$

Der 1te Theil hat einen unbekannten Theil a, oder 1300, der 2te hat 2 solcher Theile mehr 100, oder 2700.

Um dieses wieder karakterisirend in der Formel auszudrücken, müssen die Theile mit eigenen eingeschlossenen Zeichen und Zahlzeichen hinlänglich bezeichnet werden, wie in obiger Formel zu sehen ist. —

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te 3 ¾ mal so groß ist als die 2te weniger 100, beide betragen 5000. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

$$(3\tfrac{3}{4}\,\overbrace{a}^{1} - 100) + a = 5000.$$

Hier sieht man wieder wie oben, wem a allein gleich sey, nimmt hernach für die erste Zahl 3 und ¾ mal die Zahl, die man für a gefunden hat, und zieht darauf 100 davon ab, so erhält man den 1ten Theil: für den 2ten nimmt man diesen Theil einmal, und zieht nichts davon ab.

Auf die nämliche Art, wie 2 Theile oder 2 Zahlen auf diese Art ausgedrückt und behandelt worden sind, können auch 3, 4 ꝛc. behandelt werden. Als Anleitung werde ich noch einige einzelne Aufgaben dieser Art folgen lassen.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 2te 2 mal so groß ist als die 1te und die 3te 3 mal so groß als die 2te mehr 400, alle 3 betragen 5000. Es fragt sich: was dieses für 3 Zahlen seyen? —

$$\overbrace{a}^{1} + (2\,\overbrace{a}^{2}) + (6\,\overbrace{a}^{3} + 400) = 5000.$$

Hier sieht man wieder, wem a allein gleich sey, nimmt dann für den 1ten Theil ein a, für den 2ten 2 a, und für den 3ten 6 a und 400 ꝛc. —

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 1te 3 mal so groß ist als die 2te mehr 100, die 3te 3 mal so groß als die beiden 1ten, weniger 400, alle 3 sind 5000.

$$\overbrace{a}^{2} + (3\,a \overbrace{+}^{1} 100) + (a + 3\,a \overbrace{+}^{3} 100)\;(\times\;3) - 400) = 5000.$$

Desgleichen kann mit 4, 5 unbekannten Zahlen auf diese Art ausgedrückt gemacht werden.

Auch dieses kann noch mehr abgekürzt ausgedrückt werden, welches aber unnöthig ist, indem derjenige, der es versteht, es leicht selber machen kann, und für den andern ist es ganz unnütz. — Ich will nur noch in Kürze zeigen, wie 3 und 4 unbekannte Zahlen durch 3 und 4 Gleichungen allgemein gelöset werden können; ich wähle zu diesem Zweck besonders im Anfang leichte Fragen für diese Formeln.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 1te und 2te 400 betragen, 3 mal die 2te und 4 mal die 3te 1000, 1 mal die 1te und 8 mal die 3te sind 1900. Es fragt sich: welches diese 3 Zahlen seyen.

1) $a + b = 400$
2) $3\,b + 4\,c = 1000$
3) $a + 8\,c = 1900.$

Um dieses zu lösen, bringt man die erste unbekannte Zahl in der 1ten und 2ten Gleichung in ein Glied, macht dann auch aus ihrem Gleichen eine neue Gleichung, und sieht, wem die 2te unbekannte Zahl allein darin gleich sey, macht das Nämliche in der 2ten Gleichung, wodurch dann die 2te unbekannte Zahl wieder wegfällt; aus ihrem Gleichen macht man wieder eine neue Gleichung, und man erhält die 3te unbekannte Zahl allein in einer Gleichung; hier folgt die Verfahrungsart.

1) $a = 400 - b$

3) $a = 1900 - 8\,c$

$$\underbrace{400 - b}_{1} = \underbrace{1900 - 8\,c}_{3}$$
$$b = 400 - 1900 + 8\,c$$

2) $b = \frac{1000 - 4\,c}{3}$

$\overset{3}{\smile}$
$400 - 1900 + 8\,c = \frac{1000 - 4\,c}{3}$ aus dem Werth der b.

Daß man hier in der Zusammensetzung der 1ten und 3ten Gleichung bei 400 — 1900 + 8 c eine Abkürzung in der Aufhebung mit den 400 negativ machen kann, sieht jedermann ein; ich that dieses aber nicht, um alle Theile der 1ten Gleichung beizubehalten, und die Sache für den Schwächern deutlich zu machen; der Stärkere mag schon darüber.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon alle 3 mit einander 4000 betragen, die 1te mehr die 2te machen 3000; die 2te ist um 400 mehr als die 3te.

1) $a + b + c = 4000$
2) $a + b = 3000$
3) $b - 400 = c.$

Die Auflösung dieser Aufgabe geht ganz wie oben. —

Fr. Wieviel betragen die 3 Zahlen, wovon die 2te 3 mal so groß ist, als die 1te, und die 3te 4 mal so groß als die 2te, wenn alle 3 mit einander 4000 machen?

1) $\frac{b}{3} = a$

2) $\frac{c}{4} = b$

3) $a + b + c = 4000.$

Fr. Man soll 4000 so in 3 Theile theilen, daß der 2te 3 ½ mal so groß wird, als der 1te weniger 100, und

der 3te so groß als der 1te und 2te zusammengenommen mehr 200. Es fragt sich, was dieses für 3 Theile werden.

1) $a + b + c = 4000$

2) $a = \frac{b + 100}{3\frac{1}{2}}$

3) $c = a + b + 200.$

In der 2ten Gleichung muß man zum 2ten Theil 100 hinzusetzen, bis er wirklich 3 ½ mal so groß wird als der 2te; folglich $b + 100$ dividirt durch $3\frac{1}{2} = a$ rc.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 1te negativ, und die anderen positiv sind, und mit einander 3000 betragen; 2 mal der Unterschied der 1ten zur 2ten betragt 4000; der Unterschied der der 1ten zur 3ten macht 1800. Es fragt sich: was dieses für 3 Zahlen seyen.

1) $-a + b + c = 3000$

2) $2a + 2b = 4000$

3) $a + c = 1800.$

Fr. Wieviel machen die 3 Zahlen, wovon die 1te 2 ½ mal so groß ist, als die 2te mehr noch 100; die 3te mit 3 dividirt 3 mal die 1te, weniger 2 mal die 2te giebt; alle 3 mit ⅓ multiplizirt machen 2000 rc.?

1) $\frac{a - 100}{2\frac{1}{2}} = b$

2) $\frac{c}{3} = 3a - 2b$

3) $\frac{a + b + c}{3.} = 2000$

Eine Zahl mit ⅓ multiplizirt giebt ⅓ der Zahl; folglich wird die 1te, 2te und 3te unbekannte Zahl beim Divi-

diren mit 3, so viel als beim Multiplizīren mit ⅓ und folgender Ansatz ist richtig.

$$\frac{a + b + c}{3} = 2000.$$

Aus diesem erhellet, daß alles, was bei 1 und 2 unbekannten Zahlen in einer und zwei Gleichungen gefunden wurde, auch bei 3 unbekannten Zahlen in 3 Gleichungen statt findet; die weitere Ausführung liegt ganz in 2 Gleichungen zweyer unbekannten Zahlen.

Im Vorbeigehen werde ich nur noch zeigen, wie 4 unbekannte Zahlen in 4 Gleichungen behandelt werden können. Giebt man bei 4 unbekannten Zahlen wieder nur 3 Gleichungen an, so werden diese Zahlen wieder unbestimmt, wie bei 3 unbekannten Zahlen in 2 Gleichungen; — welches ebenfalls wieder unwichtig ist.

Fr. Man soll 4000 so in 4 Theile theilen, daß der 1te ½ mal so groß wird, als der 2te, der 2te ¾ des 3ten, und der 4te so groß als die 1te 3 zusammengenommen:

1) $a + b + c + d = 4000$

2) $a = \frac{b}{2}$

3) $\frac{b}{3} = \frac{c}{4}$

4) $d = a + b + c.$

Den Grund dieses Ansatzes wird man sich erklären können, oder wenigstens wird es auf dieser Stufe gefordert. Um dieses wieder allgemein zu lösen, sieht man zuerst, wem

a in jeder Gleichung, in der es sich befindet, allein gleich sey; wodurch man

$$1)\quad a = 4000 - b - c - d$$

$$2)\quad a = \frac{b}{2}$$

$$4)\quad a = d - b - c.$$

Darauf kann aus dem Werth von a der 1ten, 2ten oder 3ten Gleichung eine neue Gleichung gemacht werden.

$$\underbrace{\frac{b}{2}}^{2} = d - \underbrace{b}^{4} - c$$

$$b = \frac{2d - 2c}{3}$$

nach diesen wird b oder c allein gesucht, hier ist b bestimmt worden.

Ferner wird aus diesem Werth von b und der 3ten Gleichung, in der auch nichts als b und c sind, eine neue Gleichung gemacht.

Zum voraus sieht man aber, wem b allein in derselben gleich sey? wodurch man $b = \frac{3c}{4}$ erhält; folglich bekommt man als neue Gleichung $\frac{3c}{4} = \frac{\overbrace{2d - 2c}^{4.2}}{3}$

$$9c = 8d - 8c$$

$8c + 9c = 8d$ oder zusammengezogen $d = \frac{17c}{8.}$

Hier hat man in jedem Glied nur eine unbekannte Zahl; um die Aufgabe aber vollendet zu lösen, braucht man noch eine Gleichung, in der d allein einer andern Anzahl c gleich wird.

Zu diesem Zweck macht man mit der 1trn und 2ten Gleichung von a eine neue Gleichung.

$$\overset{1}{\smile}\qquad\qquad\overset{2}{\smile}$$

$$4000 - b - c - d = \frac{b}{2}$$

$$b = \frac{8000 - 2c - 2d}{3.}$$

Durch die 3te Gleichung hat man für $b = \frac{3c}{4}$ und auch $b = \frac{2d - 2c}{3}$ bekommen; aus einem dieser Werthe von b kann man mit obigem Werth von b eine neue Gleichung machen, wodurch, wenn man den 1ten Werth von b nimmt,

$$\frac{9c}{4} = 8000 - 2c - 2d \text{ erhält.}$$

Oben hat man d allein; folglich muß man auch hier d allein suchen, und man erhält $d = \frac{32000 - 17c}{8}$; der 1te Werth von d ist $d = \frac{17c}{8}$; folglich bekommt man für diese neue und letzte Gleichung

$$\frac{17c}{8} = \frac{32000 - 17c.}{8}$$

Hat man den unbekannten Theil c allein, so verwandelt man ihn in eine bekannte Zahl, wodurch sich dann die 3 andern Theile sehr leicht finden lassen. Z. B. um d zu finden, darf man nur $\frac{17c}{8}$ nehmen; desgleichen mit den beiden andern Theilen. — Aus diesem Verfahren wird man sich leicht die allgemeine Regel abstrahiren können. — Noch bemerke ich, daß alle 4 unbekannte Zahlen in einer, oder in 2, 3, auch in allen Gleichungen vorkommen können. — Ueber die Abkürzungen lasse ich mich hier gar nicht ein.

Ich höre mit der Ausführung einer, 2, 3 und 4 unbekannten mit bekannten Zahlen auf, und gehe zur Behandlungsart nur unbekannter oder besser gesagt, zu allgemeinen Größen über, bey denen der gleiche Gang beobachtet wird, wie bei den bekannten und unbekannten. Auch hier muß wieder bei der unorganischen und organischen Bildung angefangen werden, welches aber nichts Wichtiges enthaltet. — Dessen ungeachtet werde ich dieses in Kürze durchgehen; bei sehr kräftigen Schülern ist es nicht mehr nöthig.

§. 16.

Vom unorganischen Bilden allgemeiner Größen oder Zahlen mit algebraischen Zeichen.

(In Zukunft werde ich keinen Text mehr zu den §§. setzen, indem der Gang ganz gleich einer unbekannten mit bekannten verbunden ist —).

Wie ein Kind 1, 2, 3, 4 ꝛc. verschiedene Zahlen oder Größen nur mit Buchstaben bezeichnen kann, weiß es schon: hingegen 2, 3, 4 mal eine gleiche Zahl nur mit Buchstaben zu bezeichnen, bietet ihm etwas Neues dar; z. B. um 2 mal eine gleiche Zahl nur mit Buchstaben zu bezeichnen, nimmt man für die unbekannte Zahl a an, für 2, b, wodurch man statt 2 a, b a bekommt; b a kann daher 2 mal, 3 mal, 4 mal, 5 mal, ½, ¾ mal ꝛc. ausdrücken, oder allgemeiner gesagt: a b drückt eine unbekannte Zahl eine andere Zahl mal aus, und a a eine beliebige Zahl sich selbermal, oder so vielmal als sie Einheiten hat.

Ist ihnen dieses deutlich, so läßt man sie allgemeine Größen oder Zahlen zusammen zählen. —

Wieviel macht a b + a b + c d + f d, + c d. Man läßt sie dieses wieder zuerst in eine gewisse Ordnung bringen.

a b + c d + f d
a b + c d

2 a b + 2 c d + f d.

Um dieses aber ganz mit Buchstaben auszudrücken, läßt man sie für 2 wieder einen Buchstaben annehmen, welcher aber verschieden von diesem angenommen seyn muß, weil man nicht weiß, ob einer und welcher Buchstaben 2 bezeichnet; deßwegen nehme ich für 2, y an, und man bekommt y a b + y c d + f d; daß man f d nicht zu c d zählen kann, ohne für die 2 c und f einen neuen Buchstaben anzunehmen, der diese 2 in sich enthalten würde, ist deutlich; die weitere Ausführung wird einem jeden überlassen, desgleichen das Weitere des Zusammenzählens und Abziehens. Beim Abziehen wird besonders das des Negativen und Positiven wichtig; als Beispiel folgen ein Paar Aufgaben:

a b
—
— a

giebt als Rest a b + a.

Denn, wenn man Nichts von a b wegthut, so bleibt noch a b, nun thut man aber eine Größe a weniger weg, und also muß noch eine solche mehr bleiben; a mehr als a b macht a b + a.

Wenn von a b + q + s
— —
— d — d — q abgezogen werden

so giebt es a b + d + q + q + s.

Eine weitere Ausführung dieser Ansicht wird unnöthig.

§. 17.

Hier ist das Wiederholen allgemeiner Größen oder Zahlen mit allgemeinen Zahlen, die zum Theil positiv und zum Theil negativ sind, sehr wichtig; deßwegen folgen einige Aufgaben, welche aber im Ganzen doch ähnlich mit denen des 3ten §. sind.

Wieviel giebt a + b, a mal genommen? Daß dieses a a + a b gebe, fließt ganz aus dem 3ten §; so auch, daß a — b a mal genommen, a a — a b gebe: ferner, daß a — b mit a — b multiplizirt wieder a a — 2 a b + b b gebe, oder mit lauter Buchstaben ausgedrückt a a — y a b + b b; doch ist die letzte Bezeichnung nicht wichtig; es ist sogar gut, wenn sie in ähnlichen Fällen ganz übergangen wird, indem diese Zahlbezeichnung so aus der Natur der Sache hervorgeht. —

Wieviel a b + c, a mal wiederholt, gebe, erhellet ganz aus dem obigem; desgleichen wenn negative Größen vorkommen; auch können nicht nur 2 oder 3 verschiedene allgemeine Größen, eine allgemeine Größe mal genommen werden, welches aus folgendem Beispiel deutlich wird.

a b + c d — q m
× a — s wiederholt ꝛc.

Fr. Wie oft ist a oder a b in a b y enthalten?

Antw. a ist in a b y, b y mal enthalten und a b y mal.

a — b ist in a a — 2 a b + b b, a — b mal enthalten, aus dem gleichen Grunde, wie a — 1 in a a — 2 a + 1, welches wir schon im 3ten §. deutlich machten. —

Wie oft ist — a in + a b enthalten?

Antw. — b mal. —

Dieses zu lösen, zeigt man durch das Multiplizirens; weniger b mit — a multiplizirt, giebt + a b; — oder der 3te §. kann betrachtet werden.

Ferner weiß man, daß das Dividiren das Umgekehrte des Multiplizirens ist. — Wenn durch jenes a b hervorgeht, so muß — a in a b auch weniger b mal enthalten seyn. — Daß dieses auch wieder geistig aufgelöset werden kann, bedarf nicht mehr erwähnt zu werden, wenn man den 3ten §. in seinem Geist auffaßt; doch sind diese Verhältnisse auf dieser Stufe noch nicht in ihrem ganzen Umfang nöthig und wichtig, und gehören eigentlich in die Potenzen; sie kommen hier nicht einmal vor. —

§. 18.

Wenn a + b + c — d = f + g, wem wird a allein, b allein ꝛc. gleich seyn? ferner wem wird a + b zusammen genommen gleich seyn? eben so kann man fragen: wem + d und — f zusammen gleich seyen? —

Um diese letzte Aufgabe zu lösen, sieht man zuerst, wem + d allein, hernach wem — f allein gleich seyen, und zählt dann dieses zusammen; in der Angabe hat man — d; will man mehr d haben, so muß es in das 2te Glied gesetzt werden, eben so f in das 1te, wodurch die andern Größen jedesmal in das folgende Glied gesetzt werden müssen.

Aus diesem Beispiele wird man sehen, daß die Behandlungsart dieser Gleichheitsformeln ganz gleich denen, mit

einer unbekannten Zahl mit bekannten verbunden ist; deswegen ist eine weitere Ausführung unnöthig; wichtiger sind die organisch vergleichend ausgedrückten Formeln. —

§. 19.

Wenn $\frac{a}{b} + c - d = g$ ist, wem wird a allein gleich seyn?

Um dieses wieder zu lösen, schafft man zuerst den Bruch b weg, wodurch man $a + b\,c - b\,d = b\,g$ erhält; für a allein bekommt man folgende Formel: $a = b\,g - b\,c + b\,d$. Die letzte Versetzung dieser allgemeinen Größen ist gleich der Versetzung bekannter oder mit Zahlen bezeichneter Größen.

Auflösung. Thut man bei $\frac{a}{b}$ das b weg, so macht man die Größe a, b mal so groß; folglich muß man auch alle andere Größen des 1ten und 2ten Glieds b mal so groß machen, wodurch man denn $a + b\,c - b\,d = b\,g$ erhält; warum man $- b\,d$ bekommt, folgt aus dem 17 §.; folglich kann man allgemein sagen, daß sich das Wegschaffen des Nenners, der durch eine allgemeine oder bekannte Größe ausgedrückt ist, eben so zur Gleichung verhalte, wie bei den bekannten Zahlen.

Dieses ist auf mehrere Brüche einer Gleichung anwendbar; als Uebung kann noch etwa folgendes Beyspiel gebraucht werden.

$$\frac{ab}{c} + \frac{d}{g} - \frac{s}{mn} = y + x$$

$$ab + \frac{cd}{\cancel{g}} - \frac{cs}{mn} = cy + cx$$

$$abg + cd - \frac{scg}{\cancel{mn}} = cyg + cxg$$

$$abgmn + cdmn - scg = cygmn + cxgmn.$$

Das Wichtigste und zugleich das Schwerste ist das Suchen einer allgemeinen Größe, die mehr mal in einem oder in beiden Gliedern vorkömmt und allein in eins gebracht werden muß, ohne etwas Fremdartiges in die Gleichung zu bringen. —

Wenn $ab + ab = q$ ist, wem wird dann a allein gleich seyn?

Antw. $a = \frac{q}{b+b}$

Denn a wird zuerst b mal wiederholt, hernach wird das nämliche a noch ein mal b mal wiederholt; folglich kann man bei $ab + ab$, das a, als b mal, hernach noch als b mal, oder als $b + b$ mal genommen ansehen; will man a allein haben, so nimmt man den Theil, den a von $a \times (b + b)$ ist, welches der $b + b$ste Theil ist; folglich muß vom anderen Glied auch der $b + b$ste Theil genommen werden, oder durch $b + b$ dividirt; auch kann dieser Satz wieder auf den Ausspruch des 10ten §. oder Satzes zurückgeführt werden. —

Wenn $ab + ad = q$ ist, wem wird a allein gleich werden?

$$a = \frac{q}{b+d}$$

Die Auflösung davon ist gleich der vorhergehenden. Statt daß man dort a, b + b mal genommen hat, nimmt man es hier b + d mal ꝛc.

Das Gleiche findet statt, wenn das a auch mehrere mal in einem Glied vorkömmt.

$$a\,b + a\,d + a\,q + a\,s = y$$

$$a = \frac{y}{b + d + q + s.}$$

Aehnliche Aufgaben können auch so abgekürzt ausgedrückt werden.

$$(a) \times (b + d + q + s) = y.$$

Dadurch wird die Auflösung sehr erleichtert.

Das Gleiche findet auch bei den negativen Größen statt, worüber ein Paar Aufgaben folgen.

$a\,b - a\,d = q$. Es fragt sich: wem a allein gleich sey?

$$a = \frac{q}{b - d}$$

Denn durch $a\,b - a\,d$ wird a, b mal weniger aber d mal wiederholt; folglich wenn man a allein haben will, so nimmt man den Theil, den a von $a\,b - a\,d$ ist; folglich muß man das 2te Glied oder q durch $b - d$ dividiren, welches

$$a = \frac{q}{b - d} \text{ giebt.}$$

Kommen diese Größen auch in beiden Gliedern vor, so können sie in ein Glied gebracht, und dann wieder auf obige Art behandelt werden. Z. B.

$ab + aq + as = m + af$. Wem wird a allein gleich seyn, ohne daß a im andern Glied sind?

$$a = \frac{m}{b + q + s - f}$$

oder $$a = - \frac{m}{f - b - q - s}$$

Im ersten Fall werden die Größen a mit andern multiplizirt in's 1te; im 2ten in's 2te Glied gebracht.

Hier kann man sie den allgemeinen Schluß der Behandlung abstrahiren lassen, welcher etwa auf folgende Art lautet:

Wenn eine unbekannte Zahl oder eine allgemeine Größe, mit einer andern multiplizirt, mehr mal in einem oder beiden Gliedern einer Gleichung vorkömmt, so kann diese Größe allein in ein Glied gebracht werden, wenn man die andern Größen mit ihren multiplizirenden Größen dividirt.

Hier kann aber auch ein Fall eintretten, daß man eine negative Größe mit einer negativen dividiren muß, welchem man aber doch immer sehr leicht ausweichen kann. Z. B.

Wenn $ab - ad = -q$ ist, so ist a mal d mehr als a b; um dieses positiv zu machen, kann man $ab - ad$ ins 2te Glied thun, dafür weniger q ins 1te, wodurch man $ad - ab = q$ erhält und für $a = \frac{q}{d - b}$ Im 2ten Fall erhält man $a = - \frac{q}{b - d}$; d ist nun größer als b, folglich giebt es Negatives in Negatives zu dividiren, welches wieder Positives giebt; folglich erhält man auch a positiv; dessen ungeachtet thut man besser das Erste zu wählen.

Kommen bei einer allgemeinen Größe mehrere multiplizirende vor, so verfährt man aus obigen Gründen gleich wie mit den einfach multiplicirenden. Z. B.

Ist $abc - aqs = m$, so ist

$$a = \frac{m}{bc - qs.}$$

2te Aufgabe. $abd - amn + stq - tt = \frac{1}{2}$

$$a = \frac{\frac{1}{2} - stq + tt}{bd - mn.}$$

3te Aufgabe, in der noch dividirende Größen zum Vorschein kommen, die aber zuerst weggeschafft werden müssen. —

$$\frac{ab}{s} + \frac{qt}{r} = y - al$$

$$abr + qts = ysr - alsr$$

$$a = \frac{ysr - qts}{br + lsr.}$$

4te Aufgabe mit zusammengesetzten dividirenden Größen.

$$ab - as = \frac{t}{-l + m}$$

$$-abl + abm + asl - asm = t$$

$$a = \frac{t}{-bl + bm + sl - sm.}$$

Warum Weniger mit Weniger multiplizirt mehr giebt, soll man wissen; auch ist dieses hier noch leicht zu erklären,

besonders wenn man die Größen betrachtet, mit denen es in Beziehung steht. Um dieses zu machen, würde ich zuerst das positive m wegthun, wodurch ich das 2te Glied um m mal so groß mache; folglich muß man auch alle Größen des ersten Glieds m mal so groß machen, welches a b m — a s m giebt; dadurch daß man aber dieses gethan hat, hat man alles 1 mal zu viel genommen ꝛc.

Bei schwachen Schülern wird es zu Zeiten gut seyn, solche Aufgaben im Fortgang des Cursus noch zu lösen, um dadurch das schon Gemachte noch einmal zu wiederholen.

Noch kann eine allgemeine Zahl mit einer oder mehrern multiplizirenden und zugleich einzeln verbunden vorkommen. Z. B.

$ab + a = q$. Wem wird a allein gleich seyn? Keine a sollen im andern Glied seyn.

$$a = \frac{q}{b + 1}.$$

Denn $ab + a$ heißt, a sey b mal wiederholt und noch einmal (dieses könnte auch so ausgedrückt werden $(a) \times (b + 1)$. Wenn man also a allein haben will, so nimmt man den Theil, den a von $a \times (b + 1)$ ist; folglich muß das 2te Glied durch $b + 1$ dividirt werden.

Die negative Größe wird hier, wie in den vorhergegangenen Aufgaben behandelt, und drückt das Umgekehrte des Positiven aus; wenn man nun bei $ab - a = q$, a allein haben will, so erhält man $\frac{a = g}{b - 1}$

Das Gleiche findet statt, wenn diese Größen in 2 Gliedern vorkommen. Auch dividirende Größen können wieder gleich behandelt werden. —

Aus diesem folgt also, daß wenn eine allgemeine Größe mit einer oder mehrern multiplicirt mehr sie selber gleich ist andern Größen, so wird diese Größe allein gleich diesen andern Größen, wenn sie dividirt werden durch die sie multiplizirenden Größen mehr oder weniger 1, je nachdem mehr oder weniger noch a allein in der Gleichung sind.

Hat man $ab + a = q$ und soll b allein suchen, so kann man nicht sagen: $b = \frac{q}{a + 1}$ sondern $b = \frac{q - a}{a}$; denn denn b ist nicht a mehr einmal genommen worden, welches ganz aus obiger Auflösung folgt. Aus diesem folgt also auch hier wieder allgemein, daß wenn man eine Größe in einer Gleichung allein haben will, so müssen alle diese Größen zuerst in ein Glied gebracht werden und alle andere oder fremdartigen Größen ins 2te Glied. —

Wie hier eine allgemeine Größe in einer Gleichung abgehandelt wurde, so können auch 2, 3 Größen in 2, 3 Gleichungen abgehandelt werden, welches gewiß ein Jeder auszuführen im Stande seyn wird, wenn er die 2 und 3 Gleichungen mit 2 und 3 unbekannten und bekannten Größen aufgefaßt hat; ich begnüge mich daher mit dem Zurückweisen auf diese.

Versteht das Kind die algebraischen Formeln mit allgemeinen Größen in diesem Umfang, so kann man es auch wieder Aufgaben allein mit Buchstaben machen lassen, welches durch einige Beispiele für den Zögling und Lehrer hinlänglich deutlich wird; ich werde daher nicht mehr auf die verschiedenen §§. Rücksicht nehmen, aus denen diese oder jene Aufgabe gebildet ist. Zuerst werde ich aber doch Aufgaben geben, die durch eine, hernach durch 2 und

mehrere unbekannte Größen gebildet sind. Weil hier alle Zahlen durch Buchstaben ausgedrückt werden, so müssen für die unbekannten mehr charakterisirende genommen werden, welches gewöhnlich x, y, z sind, bei welchen ich auch bleiben will. —

§. 20.

Eine unbekannte Zahl durch lauter Buchstaben durch die algebraische Formel gelöset. —

Fr. Man denkt eine Zahl, wenn sie 2 × und um 100 größer wäre als sie ist, so wäre sie 4000. Es fragt sich: was dieß für eine Zahl sey?

Vor allem fragt er sie, was sie für die unbekannten Zahlen anrechnen wollen; sie werden sagen x, y oder z. — x soll hier die unbekannte Zahl seyn.

$2 = a$

$100 = b$

$4000 = c$, so kann man als Gleichheitsformel folgendes bekommen:

$x + ax + b = c$ und

$x = \frac{c - b}{a + 1}$ nach der Behandlungsart der allgemeinen Grössen.

Warum dieses so angesetzt werden kann, soll hier ohne die geringste Schwierigkeit eingesehen und erklärt werden können.

Fr. Wenn eine Zahl um $\frac{7}{8}$ ihrer selbst größer und hernach um 1000 kleiner wäre als sie ist, so wäre sie gleich der Zahl mehr 4000. Welches ist die Zahl?

Für die unbekannte Zahl nehme ich y an, für $\frac{7}{8}$, a für 1000 b und für 4000 c; also erhält man folgenden Ansatz:

$$y + ya - b = y + c.$$

Fr. Eine Zahl wird mit 2 dividirt, und was heraus- kommt, mit 7 multiplizirt, wodurch man dann das 10fache der unbekannten Zahl weniger 1000 erhält. Es fragt sich: was dieß für eine Zahl seye?

y die unbekannte Zahl, $a = 2$; $b = 7$; $c = 10$; $d = 1000$.

Für die algebraische Gleichung erhält man also:

$$+ \frac{b\,y}{a} = cy - d.$$

Denn die unbekannte Zahl durch 2 dividirt, giebt $\frac{y}{a}$, jetzt ist dieses, was herauskömmt, oder $\frac{y}{a}$ durch 7 multiplizirt oder $\frac{b\,y}{a}$ gleich ꝛc.

Auf eine solche Art kann jeder Ansatz gelöset werden, welches mit den Kindern auch so lange vorgenommen werden muß, bis sie geläufig jeden Ansatz machen können.

Fr. Der Unterschied zwischen einer unbekannten Zahl und 400, wovon die unbekannte die größere ist, macht 10

mal die größere weniger 5000. Es fragt sich: was das für eine Zahl seye?

Die unbekannte ist y.

$$400 = a$$
$$10 = b$$
$$5000 = c$$
$$y - a = bq - c.$$

Um den Unterschied auszudrücken, muß man die kleinere von der größeren wegthun, wodurch man $y - a$ erhält, by macht 10 mal diese unbekannte Zahl rc. —

Fr. Wie oft muß man zu 400, 3 hinzuthun, während man zu 7800, ⅓ setzt, bis die erste um 40 mehr wird als die 2te?

Das Wie oft heiße ich x, $400 = a$, $3 = b$, $7800 = c$, $\frac{1}{3} = d$, $40 = e$.

$$a + bx - e = c + dx.$$

Eben so kann das Abziehen oder Wegthun behandelt und angesetzt werden. Das Gleiche findet statt bei den negativen Zahlen.

Fr. Wie oft muß man zu 500, 3 hinzuthun, während man von 600, 2½ wegthut, bis die 1te 3½ × so groß wird als die 2te?

Die unbekannte y, $500 = a$, $3 = b$, $600 = c$ $2\frac{1}{2} = d$, $3\frac{1}{2} = e$.

$$\frac{a + yb}{e} = c - yd$$

$$a + yb = ec - eyd$$

$$yb + eyd = ec - a$$

$$y = \frac{ec - a}{b + ed.}$$

Folglich erhält man für y, oder die unbekannte Zahl diesen Ausdruck; will man dieses in Zahlen wissen, so setzt man an die Stellen der bekannten Zahlen ihre Buchstaben, wodurch man für y 3 ½ × 600, weniger 500, getheilt durch 3 mehr 2 ½ × 3 ½, erhält.

Auf diese Weise werden in allen Aufgaben an die Stellen der Buchstaben die bekannten Zahlen gesetzt, welches so ganz aus der Formel fließt, daß beinahe jede Bemerkung unnöthig wird. —

Fr. Wie oft muß man von 400, 3 wegthun, während man zu 100, 100 hinzusetzt, bis die 2te 9/10 mehr 100 der 1ten wird?

Die unbekannte Zahl = x, 400 = a, 3 = b; 100 = c, 9/10 = d oder es kann für 9, d und für 10, e angenommen und folgender Ansatz gemacht werden:

$$\frac{a - bx}{e} = \frac{c + cx - c}{d};$$

denn wenn die 2te 9/10 der ersten werden soll, so hat die 2te 9 Theile wie die 1te 10, nachdem die 100 oder das c von der 2ten weggethan wird. —

Ich nehme für d, $\frac{9}{10}$ an, wodurch man

$$a - bx = \frac{c - cx - c}{d};$$

denn wenn das 2te Glied c — c y — c, $\frac{9}{10}$ vom ersten ist, so hat das 2te Glied 9 Theile, wie das 1te 10; folglich ist das 1te 1 $\frac{1}{9}$ mal so groß als das 2te, das 2te mit $\frac{9}{10}$ dividirt, giebt auch 1 $\frac{1}{9}$ mal die 2te Größe, also $\frac{c - cy - c}{d}$ gleich dem ersten Glied. Daß um dieses zu lösen das mehr c von weniger c des 2ten Glieds weggethan werden kann, versteht sich von selbst. —

Auch hier hat es wieder Aufgaben, die 2 und 3 unbekannte Größen haben und durch eine Gleichung gelöset werden können, und besonders solche, die durch das Theilen und organische Vergleichen ausgedrückt werden. Als Beispiel folgen ein Paar Aufgaben.

Fr. Man soll 4000 so in 2 Theile theilen, daß der 2te 3 ½ mal so groß wird als der 1te mehr 100. Es fragt sich: was dieses für Theile werden? Für den unbekannten Theil nehme ich y an, 4000 = a, 3 ½ = b, 100 = c, wodurch man als Gleichung erhält:

$$\underbrace{y}_{1} + \underbrace{(by + c)}_{2} = a.$$

Darauf wird y wieder eben so bestimmt, wie in den vorhergehenden Formeln; nimmt dann für den 1ten Theil $\underbrace{y}_{1}$, für den 2ten $\underbrace{(by + c.)}_{2}$.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te 4 ½ × so groß ist als die 2te, weniger aber 300; beide zusammen betragen 9000. Es fragt sich, wieviel jede dieser Zahlen betrage?

Für die unbekannte nehme ich x an, für 4 ½ c, 300 = b; 9000 = c

$$\left\{ a \overset{1}{\overbrace{x -}} b \right\} \overset{2}{\overbrace{+ x}} = c.$$

Fr. Man soll 4000 so in 3 Theile theilen, daß der 2te 3 mal so groß wird als der 1te mehr 100 und der 3te 4 mal so groß als die beiden vorhergehenden. Es fragt sich: wieviel diese 3 Theile werden?

Für den unbekannten Theil nehme ich z an; 4000 = a, 3 = b, 100 = c, 4 = d.

$$\overset{1}{\overbrace{z +}} \left\{ b z \overset{2}{\overbrace{+}} c \right\} + d z + d \overset{3}{\overbrace{b z}} + d c \Big\} = a.$$

Auch hier wird die unbekannte Größe wieder wie oben bestimmt, und für den 1ten Theil z, für den 2ten b z + c ꝛc. genommen.

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 2te 3 ½ mal so groß ist als die 1te, und noch weniger 100, die 3te ist 7 ⅔ der 1ten mehr aber 300 und diese 3 Zahlen betragen zusammen 5000. Es fragt sich: wieviel sie seyen?

Die unbekannte y, 3 ½ = a, 100 = b, 2/3 = c, 300 = d, 4000 = f.

Daß auch dieser Ansatz wieder ganz wie der vorhergehende gemacht werden könne, ist hinlänglich deutlich. Noch könnte man, statt alle 3 Zahlen oder alle 3 Theile in einer bekannten Zahl anzugeben, nur einen oder 2 angeben, wodurch man etwa folgende Aufgaben bekäme. —

Fr. Man denkt 3 Zahlen, wovon die 2te 3 mal so groß ist, als die 1te mehr 100 und die 3te 4 mal so groß als die 2 vorhergehenden weniger aber 400. Die 1te Zahl soll 2000 seyn, oder die 2te soll dieses seyn oder die 3te, oder die 1te und 2te zusammengenommen oder die 2te und 3te; oder alle 3 sollen dieses zusammen genommen seyn. —

Für die unbekannte Zahl nimmt man y an, $3 = a$, $100 = b$, $4 = c$, $400 = d$, $2000 = q$.

$$\overset{1}{y} + \left\{ \overset{2}{ay + b} \right\} cy + \overset{3}{cay} + cb - d.$$

Dieses ist nun das Verhältniß der 3 Zahlen zu einander; würde man angeben, alle 3 Zahlen betrügen 2000, wie im letzten Falle der Angabe steht, so würde man dieses als das 1te Glied der Gleichung erhalten, wovon q das 2te wäre; giebt man aber an, die 1te Zahl sey 2000, so erhält man $y = 2000$, in diesem Fall wird die 2te Zahl $ay + b$ rc. seyn; nimmt man aber an, die 2te Zahl sey 2000, so erhält man $ay + b = q$; bei der 3ten giebt es $cy + cay + cbd = q$; sind die 2te und 3te zusammengenommen 2000, so erhält man $\overset{1}{y} + \left\{ \overset{2}{ay} + b = q \right.$ rc. — in jedem Fall ist jede Zahl leicht zu bestimmen.

Nicht unwichtig mag eine charakterisirende Eigenschaft derjenigen Aufgaben seyn, wovon 2 und mehrere unbekanute Zahlen durch eine Gleichung gelöset werden können, und diese besteht darinn, daß bei der Angabe die Verhältnisse der Zahlen oder der Theile derselben zugleich mit dem Verhältniß zum Ganzen ihrer Summe oder der Theile derselben gegeben werden. Diese Aufgaben können wegen dieser wichtigsten Eigenschaft noch mehr von den andern Aufgaben getrennt werden, als es in diesem Buch der Fall ist, welches aber durch das Dargestellte hinlänglich deutlich ist.

§. 21.

Von zwei unbekannten Zahlen durch allgemeine Zeichen gelöset.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te 2 mal, und die 2te 3 mal genommen, 4000 ausmachen; beide zusammen betragen 1900. Wieviel ist jede dieser Zahlen?

Für die 1te unbekannte Zahl nehme ich y, für die 2te x an, $2 = a$, $3 = b$, $4000 = c$, $1900 = d$

1te Gleichung $ay + bx = c$

2te — — $y + x = d$.

Um dieses zu lösen, bringt man y der 1ten und 2ten Gleichung allein in ein Glied; auch mit x kann dieses vorgenommen werden. In der 1ten Gleichung erhält man:

1) $y = \frac{c - bx}{a}$

2) $y = d - x$;

folglich kann man auch sagen: $\frac{c - bx}{a} = d - x$, wodurch man eine unbekannte Größe und eine Gleichung erhält, die wieder durch den vorhergehenden §. gelöset werden kann; hat man die eine unbekannte Zahl, so kann die andere bestimmt werden, indem man den Werth dieser bekannten in die Gleichung setzt. Z. B. Wenn man x hat, so kann dieser Werth in die 1te oder 2te Gleichung gesetzt werden, in der y allein steht.

Fr. Man denkt 2 Zahlen, wovon die 1te um 200 mehr ist als die 2te, 3 ½ mal die 1te, weniger 10 × die 2te betragen Nichts. Es fragt sich: was dieses für 2 Zahlen seyen?

Die 1te unbekannte ist y, die 2te x, 200 = a, 3 ½ = b, 10 = c und für Nichts kann man auch einen Buchstaben oder diese beiden Striche „ annehmen. Ich nehme hier für Nichts dieses „ an.

1) $y - a = x$

2) $by - cx =$ „

Fr. Wieviel betragen die 2 Zahlen, wovon die 1te die größere und 7 ½ × der Unterschied zwischen diesen beiden Zahlen, um 100 mehr ist als die Summe beider, wenn ferner die größere mehr 3 mal die kleinere 1000 machen?

1te unbekannte Zahl y, 2te x, 7 ½ = a, 100 = b 3 = c, 1000 = d.

1) $ya - xa - b = y + x$

2) $y + cx = d$.

Statt in der 2ten Gleichung wieder beide unbekannte Zahlen hineinzubringen, könnte man auch nur eine oder den Unterschied angeben. Z. B. die größere wäre 1000, wodurch man folgende Gleichungen erhalten würde.

1) $ya - xa - b = y + x$

2) $y = d.$

Daß die Ausführung dieser und ähnlicher Aufgaben noch leichter und einfacher ist, ergiebt sich schon aus dem 2ten Ansatz, in dem y schon allein steht, und nicht mehr weiter gesucht werden muß. —

Giebt man bei solchen Aufgaben nicht an, welches die größere oder die kleinere Zahl ist; so giebt es auch hier wieder 2 Zahlen, die diesem entsprechen, wie wir schon hinlänglich aus vorhergehenden Uebungen und Reihenfolgen gesehen haben. —

Fr. Die 1te von 2 Zahlen ist kleiner als die 2te, 9 ½ mal der Unterschied zwischen diesen 2 Zahlen ist $\frac{1}{20}$ von der Summe beyder, wenn sie um 200 mehr wäre als sie ist, 8 mal die kleine, 10 mal die größere weniger 300 mal der Unterschied machen 4000 negativ ꝛc.

Die 1te unbekannte Zahl y, die 2te x, $9\frac{1}{2} = a$, $\frac{1}{20} = b$, $200 = c$, $8 = d$, $10 = f$, $300 = g$, $4000 = h$.

1) $\frac{-ay + ax}{b} = y + x + c$

2) $dy + fx + gy - gx = -h.$

In der 2ten Gleichung hat man $gy - gx$, welches weniger 300 × mal den Unterschied bezeichnet, indem die kleinere weniger die größere den Unterschied negativ, oder fehlend ausdrücken. — In der ersten Gleichung steht $\frac{-ay + ax}{b}$; in der Angabe heißt es, daß $-ay + ax$, $\frac{1}{20}$ vom 2ten Glied sey; folglich macht das 20fache des 1ten Glieds das 2te, durch $\frac{1}{20}$ dividirt erhält man auch das 20fache. — Wie hier die schwierigsten Theile behandelt werden, können auch die andern behandelt und erklärt werden.

Die ganze Auseinandersetzung ist nur für schwächere nöthig, in so fern ist es Sache des Lehrers, und darf vorausgesetzt werden.

Diejenigen 2 und 3 unbekannten Zahlen, die im Vorhergehenden durch eine Gleichung gelöset worden sind, können auch durch 2 gelöset werden, worüber ein Paar Aufgaben folgen. —

Fr. Man soll 4000 so in 2 Theile theilen, daß der 2te 4 ¾ mal so groß wird als der 1te weniger 700. Es fragt sich: was dieses für 2 Theile seyen?

Der 1te unbekannte Theil y, der 2te x, $4000 = a$, $4\frac{3}{4} = b$, $700 = c$.

1) $y + x = a$

2) $y = \frac{x + c.}{b}$ Die 2te Gleichung kann auch so gemacht werden $by = x + c$.

§. 22.

Von drei unbekannten Zahlen.

Fr. Wieviel betragen die 3 Zahlen, wovon die 1te mehr 3 mal die 2te 4000 und 4 ½ mal die 2te weniger die 3te Nichts machen, wenn alle miteinander 7000 ausmachen?

Die 1te Zahl ist y, die 2te x, und die 3te z, $3 = a$, $4000 = b$, $4\frac{1}{2} = c$, $7000 = q$.

1) $y + ax = b$

2) $cx - z =$ „ oder für Nichts o, wodurch man $cx - z = o$ bekommt.

3) $y + x + z = q$.

Die Auflösung dieser Formeln ist wieder wie bei 3 unbekannten Zahlen mit bekannten. Giebt man auch hier wieder bei 2 unbekannten Zahlen nur Verhältnisse zu 2 Gleichungen an, so sind sie ebenfalls unbestimmt.

Eine weitere Ausführung dieser Aufgaben ist für den Zweck dieses Buchs unnöthig, indem Lehrer und Zögling so tief in das Wesen eindringen soll, daß er das Weitere nach Bedürfniß leicht selber machen kann. Wie ich schon in dem Hefte über die Zahl zeigte, daß die geometrischen Verhältnisse nichts anderes seyen als eine doppelte organische Vergleichung, durch die Gleichheit verbunden, so findet dieses auch in algebraischer Rücksicht statt, welches meistens auch in seinem ganzen Umfang ausgeführt ist; doch fehlen ihm noch die allgemeinen Abstraktionsregeln.

§. 23.

Von den algebraischen geometrischen Verhältnissen. —

Wenn sich a zu b verhält, wie c zu d, so wird es auf folgende Art ausgedrückt: a : b :: c : d. Bei solchen Verhältnissen ist das Wichtigste, daß die 2 äußere mit einander multiplizirt, gleich sind den 2 mittlern miteinander multiplizirt, wodurch der Ausdruck: a : b :: c : d in a d = b c umgeändert werden kann; denn a ist nach der Erklärung der geometrischen Verhältnisse der gleiche Theil von b, wie c von d; folglich kann man sagen: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; schafft man die Brüche weg, so erhält man a d = b c. Auf eine andere Art gelöset:

Das 1te Glied eines geometrischen Verhältnisses ist der gleiche Theil vom 2ten, wie das 3te vom 4ten; ist das 1te die Hälfte vom 2ten, so wird das 3te auch dieser Theil vom 4ten; multiplizirt man die äußeren Glieder miteinander, so nimmt man das 2te Glied des 2ten Verhältnisses 1 mal, oder das 1te Glied des 1ten Verhältnisses 2 mal; multiplizirt man die 2 mittlern Glieder mit einander, so nimmt man das 1te Glied des 2ten Verhältnisses auch 2 mal; wodurch man folglich Gleiches erhält; dieses findet statt, wenn das 1te Glied ¼, ⅕, 6/7 ꝛc. vom 2ten ist; weil dieses bei jedem beliebigen angenommenen Theil statt findet, so muß es auch da statt finden, wo das Verhältniß nicht mehr durch die Zahl ausgedrückt ist. Folglich sind die äußeren Glieder eines geometrischen Verhältnisses mit einander multiplizirt gleich den Mittlern.

Aus diesem folgt noch, daß wenn das geometrische Verhältniß nur 3 Glieder hat, das Mittlere mit sich selbst multiplizirt oder ins Quadrat erhoben, gleich ist den 2 äußeren,

welches aber in der weiteren Ausführung mehr in die 2te Potenz gehört. Der algebraische Ausdruck davon ist:

$$a : b :: b : c \text{ oder } ac = bb.$$

$$a + b : c :: q : s + t.$$

Um der leichteren Auflösung willen, können diese Größen zusammengezogen werden und für $a + b$ kann m, und für $s + t$, n genommen werden, wodurch sich dieses Verhältniß in das Vorhergehende umwandelt, und man bekommt $m : c :: q : n$. Mit negativen Größen: $a - b : q :: s - m : w$ für $a - b$ wird x, für $s - m$, y angenommen, wodurch man folgendes Verhältniß erhält: $x : q :: y : w$.

Bei einem geometrischen Verhältniß ist ferner das Versetzen der Glieder nicht unwichtig und besonders folgendes: das 1te Glied eines geometrischen Verhältnisses verhält sich zum 3ten, wie das 2te zum 4ten; denn ein geometrisches Verhältniß $\overset{1}{a} : \overset{2}{b} :: \overset{3}{c} : \overset{4}{d}$ läßt sich in folgenden Ausdruck umwandeln:

$$\frac{a\,\overset{1}{\smile}}{b\,\overset{2}{\smile}} = \frac{c\,\overset{3}{\smile}}{d\,\overset{4}{\smile}}$$

Hier ist a der gleiche Theil von b, wie c von d. Sieht man b und d als die Ganzen an, wovon das 2te Ganze d, 2 mal oder 3 mal rc. so groß ist als das 1te b, so wird der Theil c der gleiche Theil von diesem doppelten oder 3fachen, wie a von seinem b; folglich ist der gleiche Theil des 1ten Ganzen oder a, der gleiche Theil vom ähnlichen Theil c wie b von d. Auch hierüber können noch mehrere Auflösungen gemacht werden, welches aber jedem überlassen werden darf. Eben so könnten andere Versetzungen untersucht werden. Auch könnte untersucht werden, was durch das Hinzusetzen und Abziehen theils geometrischer, theils nicht geometrischer Verhält-

nisse entstehen würde, welches aber zu diesem Gebrauch ganz unnöthig ist.

§. 24.

Von einer unbekannten Zahl, die durch eine algebraisch geometrische Formel gelöset wird.

Daß dieses auch zuerst mit Buchstaben und Zahlen vereinigt und erst hernach mit Buchstaben allein gemacht werden kann, versteht sich; ich wähle aber das Letztere, indem das Erstere wohl entbehrt werden kann.

Fr. Wie oft muß man zu 100, 20 thun, während man zu 1000, 1 setzt, bis sich die 1te Größe zu der 2ten verhält wie 2 zu 3? —

Für das unbekannte Hinzusetzen nehme ich y an, $100 = a$ $20 = b$. $1000 = c$. $1 = d$. $2 = f$. $3 = g$.

$a + by : c + dy :: f : g$. Multiplizirt man die äußern und die mittlern Glieder mit einander, so erhält man: $ga + gby = fc + fdy$. Hier wird wieder gesehen, wem y gleich sey? welches wieder eben so fortgeht, wie in den vorhergehenden §§.

Diese Aufgabe ist im Wesen mit der: „Man hat 2 Zahlen, wovon die eine 100, und die andere 1000 ist, zur 1ten setzt man 20, während man zur 2ten 1 setzt. Es fragt sich: wie oft dieses geschehen muß, bis die 1te ⅔ der 2ten wird“ gleich; der Unterschied besteht hier rein im Ausdruck und der Formel des Verfahrens. Diese 1te Aufgabe ist durch den abstrakten Begriff des geometrischen Verhältnisses ausgedrückt, während die 2te durch den noch zum geometrischen Verhältniß bilden- oder realen Begriff ausgedrückt wird. Als Leitfaden werde ich noch einige Aufgaben folgen lassen, die theils 1 und auch 2 unbekannte Größen enthalten können; das geo-

metrische Verhältniß kann entweder in beiden oder nur einer Gleichung enthalten seyn.

Fr. Es fragt sich: wie oft man von 4000, 2 wegthun müsse, während man zu 100, 3½ hinzusetzt, bis sich die 1te Gröste zur 2ten verhält, wie 3 zu 4 — oder wie 3 zu 4 weniger oder mehr diese oder jene bekannte Zahl; für die unbekannte Zahl wird y. 4000 = a; 2 = b; 100 = c; 3½ = d; 3 = f; 4 = q angenommen. Der Ansatz ist folgender:

— y b + a : c + d y :: f : q. Die äußeren Glieder mit einander multiplizirt: — q y b + q a = f c + f d y.

Fr. Wie oft muß man zu 1000 negativ 3 setzen, während man von 4000 positiv, ⅓ wegthut; bis sich die 1te Größe zur 2ten verhält, wie 4¾ zu 9½?

Unbekannte Zahl = y; 1000 = a; 3 = b; 4000 = c; ⅓ = d; 4¾ = q; 9½ = s.

— a + b y : c — d y :: q : s. In Gleichheit gebracht, giebt es: — s a + s b y = q c — q d y.

Fr. Wieviel machen die 2 Zahlen, wovon die 1te und 2 mal die 2te 4000 machen; wenn sich die 1te zur 2ten verhält wie 9 zu 10.

Die 1te unbekannte Zahl = y; die 2te = x; 2 = a; 4000 = b; 9 = c; 10 = d;

1) y + a x = b

2) y : x :: c : d

d y = c x. Die weitere Auflösung geht wie bey 2 unbekannten Zahlen in 2 Gleichungen weiter fort.

Fr. Wieviel betragen die 2 Zahlen, wovon die 1te sich zur 2ten verhält :: 10 : 11. 3 mal die 1te weniger 1000 verhält sich zu 20 × mit der 2ten wie 1 : 2. Was sind dieses für 2 Zahlen?

Die 1te unbekannte Zahl = y; die 2te = x; 10 = a; 11 = b; 3 = c; 1000 = d; 20 = f; 1 = g; 2 = h. 1) y : x :: a : b. 2) cy — d : fx :: g : h.

In beiden Gleichungen werden die äußeren und mittleren Glieder wieder mit einander multiplizirt, wodurch man die 2 algebraischen Gleichungen erhält. Aus diesen wenigen Aufgaben wird die Ausdehnung dieses §. hinlänglich deutlich seyn. Besonders wenn man bedenkt, daß alle Aufgaben wieder theils durch die unorganische und organische Bildung und Vergleichung ausgedrückt werden können. Noch könnte man den Schüler eine oder mehrere Gleichungen nur mit Buchstaben auf die Tafel machen, und dieselben wieder alle Aufgaben aufstellen lassen, die diese Form ausdrückt, welches gewiß jeder ohne Schwierigkeit im Stand seyn wird, auszuführen.

Eine sehr wichtige Uebung für Lehrer und Schüler wäre auf dieser Stufe eine Uebersicht über alle die verschiedenartige §§., welches ein Jeder, der die Sache aufgefaßt hat, geben kann. Noch wichtiger wird aber das Aufstellen der Gesetze seyn, nach denen die Aufgaben und Reihenfolgen eines jeden §. gemacht werden; so daß der Zögling fähig wird Aufgaben zu geben und zu machen, so wie gegebene zu lösen, worüber auch das Buch genugthuende Auskunft geben soll. — Dieses soll aber das Letzte seyn. —

